ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς

Στην Εισαγωγή στη Μηχανική, πριν το Κεφάλαιο 1, είδαμε ότι ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα ισχύει μόνο για *αδρανειακούς παρατηρητές*, δηλαδή για παρατηρητές που είτε είναι ακίνητοι είτε κινούνται με σταθερή (κατά μέτρο και κατεύθυνση) ταχύτητα. Θα δούμε τώρα τι συμβαίνει σε *μη αδρανειακούς παρατηρητές*, δηλαδή σε παρατηρητές που ή επιταχύνονται ή περιστρέφονται περί έναν άξονα ή και τα δύο.

9.1 Περιστρεφόμενοι παρατηρητές

Ας θεωρήσομε δυο συστήματα συντεταγμένων x_0, y_0, z_0 και x, y, z τα οποία έχουν κοινή αρχή Ο και κοινό άξονα $z_0 = z$. Θεωρούμε ότι το σύστημα x, y, z προκύπτει από το σύστημα x_0, y_0, z_0 με περιστροφή του ως προς τον άξονα z_0 κατά γωνία θ με φορά περιστροφής αντίθετη αυτής των δεικτών του ωρολογίου. Αν η γωνία θ είναι σταθερή, τότε το σύστημα x, y, z είναι ακίνητο, απλώς είναι περιστραμμένο σε σχέση με το σύστημα x_0, y_0, z_0. Αν όμως $\theta = \theta(t)$, τότε το σύστημα x, y, z περιστρέφεται περί τον άξονα $z_0 = z$ με γωνιακή ταχύτητα $\omega(t) = \dfrac{d\theta(t)}{dt}$ σε σχέση με το σύστημα x_0, y_0, z_0. Ας θεωρήσομε ότι το σύστημα x_0, y_0, z_0 είναι ακίνητο. Ένας παρατηρητής που βλέπει το σύστημα x_0, y_0, z_0 ως ακίνητο είναι κι αυτός ακίνητος. Άρα είναι *αδρανειακός παρατηρητής,* ας τον πούμε Π_0. Όμως, ένας παρατηρητής που βλέπει το περιστρεφόμενο σύστημα x, y, z ως ακίνητο είναι κι αυτός περιστρεφόμενος <u>με την ίδια γωνιακή ταχύτητα</u> ω. Αυτός είναι *μη αδρανειακός παρατηρητής* και θα τον συμβολίζομε με Π.

Είναι σημαντικό να τονίσομε εδώ ότι ένας περιστρεφόμενος, μη αδρανειακός παρατηρητής μπορεί να μην το καταλαβαίνει ότι περιστρέφεται. Για χιλιετίες οι άνθρωποι στη Γη θεωρούσαν ότι η Γη είναι ακίνητη και ότι το Σύμπαν κινείται γύρω από τη Γη. Ακόμα και σήμερα, που ξέρομε ότι η Γη κινείται γύρω από τον Ήλιο, μιλάμε σαν να ήταν η Γη ακίνητη (ανατολή Ηλίου, δύση Ηλίου κλπ). <u>Σε όλη τη συζήτησή μας από εδώ και κάτω θα θεωρήσομε περιστρεφόμενους, μη αδρανειακούς παρατηρητές, που όμως δεν το καταλαβαίνουν ότι περιστρέφονται. Θεωρούν ότι ο υπόλοιπος κόσμος περιφέρεται γύρω τους.</u>

Ας θεωρήσομε τώρα υλικό σημείο μάζας m που κινείται, χάριν ευκολίας, στο επίπεδο $x_0 y_0 = xy$ λόγω του ότι ασκείται σ' αυτό δύναμη $\vec{F}$, που και αυτή είναι διάνυσμα στο επίπεδο $x_0 y_0 = xy$. Για τον παρατηρητή Π_0, το υλικό σημείο έχει την τυχούσα χρονική στιγμή t συντεταγμένες $(x_0,\ y_0)$ στο σύστημα Π_0. Για τον παρατηρητή Π, το υλικό σημείο έχει την ίδια χρονική στιγμή συντεταγμένες $(x,\ y)$ στο σύστημα Π. Οι σχέσεις που συνδέουν τα δυο ζεύγη συντεταγμένων είναι

$$x = x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta, \tag{9.1α}$$

$$y = -x_0 \sin\theta + y_0 \cos\theta\,, \tag{9.2α}$$

ή χρησιμοποιώντας τον πίνακα στροφής γράφομε

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{9.2}$$

Για τον ίδιο λόγο, οι σχέσεις που συνδέουν τις συνιστώσες της $\vec{F}$ είναι

$$F_x = F_{x_0} \cos\theta + F_{y_0} \sin\theta\,, \tag{9.3α}$$

$$F_y = -F_{x_0} \sin\theta + F_{y_0} \cos\theta\,, \tag{9.3β}$$

ή χρησιμοποιώντας τον πίνακα στροφής γράφομε

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{x_0} \\ F_{y_0} \end{pmatrix}. \tag{9.4}$$

Ο παρατηρητής Π_0 είναι αδρανειακός, άρα μπορεί να γράψει τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα για τον άξονα x_0

$$m\frac{d^2 x_0}{dt^2} = F_{x_0} \tag{9.5}$$

και για τον άξονα y_0

$$m\frac{d^2 y_0}{dt^2} = F_{y_0}\,. \tag{9.6}$$

Το ερώτημα τώρα είναι αν ο παρατηρητής Π μπορεί να γράψει

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = F_x\,. \tag{9.7}$$

Η απάντηση είναι όχι!!! Ας δούμε γιατί. Παίρνομε το αριστερό μέλος της εξίσωσης (9.7) και χρησιμοποιώντας τη σχέση (9.1α) έχομε

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(x_0\cos\theta + y_0\sin\theta)\right)$$

$$= m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_0}{dt}\cos\theta + x_0(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt} + \frac{dy_0}{dt}\sin\theta + y_0\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$= m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_0}{dt}\cos\theta - x_0\omega\sin\theta + \frac{dy_0}{dt}\sin\theta + y_0\omega\cos\theta\right). \tag{9.8}$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις έχομε

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= m\frac{d^2x_0}{dt^2}\cos\theta + m\frac{dx_0}{dt}(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt} - m\frac{dx_0}{dt}\omega\sin\theta \\
&\quad - mx_0\frac{d\omega}{dt}\sin\theta - mx_0\omega\cos\theta\frac{d\theta}{dt} \\
&\quad + m\frac{d^2y_0}{dt^2}\sin\theta + m\frac{dy_0}{dt}\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + m\frac{dy_0}{dt}\omega\cos\theta \\
&\quad + my_0\frac{d\omega}{dt}\cos\theta + my_0\omega(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}, \qquad (9.9)
\end{aligned}
$$

η οποία γράφεται ως

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= m\frac{d^2x_0}{dt^2}\cos\theta - 2m\omega\frac{dx_0}{dt}\sin\theta - mx_0\frac{d\omega}{dt}\sin\theta - mx_0\omega^2\cos\theta \\
&\quad + m\frac{d^2y_0}{dt^2}\sin\theta + 2m\omega\frac{dy_0}{dt}\cos\theta + my_0\frac{d\omega}{dt}\cos\theta - my_0\omega^2\sin\theta \qquad (9.10)
\end{aligned}
$$

ή γράφοντας τους όρους με διαφορετική σειρά

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= m\frac{d^2x_0}{dt^2}\cos\theta + m\frac{d^2y_0}{dt^2}\sin\theta \\
&\quad - 2m\omega\frac{dx_0}{dt}\sin\theta - mx_0\frac{d\omega}{dt}\sin\theta - mx_0\omega^2\cos\theta \\
&\quad + 2m\omega\frac{dy_0}{dt}\cos\theta + my_0\frac{d\omega}{dt}\cos\theta - my_0\omega^2\sin\theta\,. \qquad (9.11)
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (9.5) και (9.6) η (9.11) γράφεται

$$
m\frac{d^2x}{dt^2} = F_{x_0}\cos\theta + F_{y_0}\sin\theta + \text{όρους με διαστάσεις δύναμης} \qquad (9.12)
$$

ή

$$
m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x + \text{όρους με διαστάσεις δύναμης}, \qquad (9.13)
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση (9.3α).

Από την εξίσωση (9.13) συμπεραίνομε ότι ο παρατηρητής Π, που είναι *μη αδρανειακός παρατηρητής,* δεν επιτρέπεται να γράψει τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα ως "μάζα επί επιτάχυνση ίσον φυσική δύναμη", όπου ως φυσική δύναμη εννοούμε μια από τις δυνάμεις της Φύσεως (π.χ., δύναμη Coulomb, δύναμη Hooke, δύναμη παγκόσμιας έλξης κ.α.). Με άλλα λόγια, ο παρατηρητής Π έχει δύο δυνατότητες: Είτε να πει ότι ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα δεν ισχύει για μη αδρανειακούς παρατηρητές είτε να θεωρήσει ότι στο υλικό σημείο ασκούνται πέραν των φυσικών δυνάμεων και κάποιες άλλες δυνάμεις, που δεν είναι φυσικές και θα τις αποκαλούμε *ψευδοδυνάμεις*. Αυτοί είναι οι "όροι με διαστάσεις δύναμης" που γράψαμε στην εξίσωση (9.13). Όπως θα δούμε παρακάτω, για περιστρεφόμενους παρατηρητές υπάρχουν τρεις ψευδοδυνάμεις: Η *φυγόκεντρος* δύναμη, η δύναμη *Coriolis* και η ψευδοδύναμη *λόγω γωνιακής επιτάχυνσης*. Θα τις εξετάσομε μια-μια χωριστά.

9.1.1 Φυγόκεντρος δύναμη

Για την κατανόηση της φυγοκέντρου δυνάμεως θα χρησιμοποιήσομε ένα απλό παράδειγμα.

Ας θεωρήσομε έναν <u>αδρανειακό</u> παρατηρητή Π_0, ο οποίος παρατηρεί την ομαλή κυκλική κίνηση ενός ηλεκτρονίου μάζας m γύρω από ένα <u>ακίνητο</u> πρωτόνιο στην αρχή των αξόνων x_0, y_0, z_0. Η κίνηση του ηλεκτρονίου γίνεται στο επίπεδο $x_0 y_0$, η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι R και η γωνιακή ταχύτητα περιφοράς τού ηλεκτρονίου ω.

Ο <u>αδρανειακός</u> παρατηρητής λέει: Στο ηλεκτρόνιο ασκείται η δύναμη Coulomb, που έχει μέτρο ke^2/R^2, όπου $e>0$ είναι το φορτίο του πρωτονίου και είναι ελκτική δύναμη, δηλαδή προς το κέντρο. Λόγω του ότι το ηλεκτρόνιο κάνει ομαλή κυκλική κίνηση, η δύναμη Coulomb παίζει ακριβώς τον ρόλο της <u>κεντρομόλου</u> δύναμης, που έχει μέτρο $m\omega^2 R$.

Ας θεωρήσομε τώρα έναν <u>μη αδρανειακό</u> παρατηρητή Π, του οποίου το σύστημα x, y, z περιστρέφεται περί τον κοινό άξονα $z_0 = z$ <u>με την ίδια γωνιακή ταχύτητα</u> ω με την οποία περιφέρεται το ηλεκτρόνιο στην κυκλική τροχιά. Χάριν ευκολίας, ας θεωρήσομε ότι ο περιστρεφόμενος άξονας x έχει κατεύθυνση από το πρωτόνιο προς το ηλεκτρόνιο. Επειδή το σύστημα x, y, z και το ηλεκτρόνιο γυρίζουν με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω, ο μη αδρανειακός παρατηρητής Π, ο οποίος περιστρέφεται μαζί με το σύστημά του, παρατηρεί ότι το ηλεκτρόνιο βρίσκεται <u>πάντοτε</u> στη θέση $x = R$. Με άλλα λόγια, <u>για τον μη αδρανειακό παρατηρητή</u>, που περιστρέφεται, αλλά δεν το καταλαβαίνει ότι περιστρέφεται, <u>το ηλεκτρόνιο είναι ακίνητο</u>! Αυτό σημαίνει <u>για τον μη αδρανειακό παρατηρητή</u> Π ότι η συνολική δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο είναι ίση με μηδέν, αλλιώς το ηλεκτρόνιο θα κινούνταν. Ο μη αδρανειακός παρατηρητής Π δεν έχει καμία αμφιβολία ότι στο ηλεκτρόνιο ασκείται η <u>φυσική</u> δύναμη Coulomb. Επειδή όμως η συνολική δύναμη είναι μηδέν, πρέπει να υποθέσει ότι υπάρχει επιπλέον μια ίση και αντίθετη δύναμη. Τη δύναμη αυτή την αποκαλεί *φυγόκεντρο*, δηλαδή το αντίθετο της κεντρομόλου. Έτσι, ο μη αδρανειακός παρατηρητής Π γράφει για την ολική δύναμη που <u>νομίζει</u> ότι ασκείται στο ηλεκτρόνιο

$$\vec{F} = -k\frac{e^2}{R^2}\hat{i} + m\omega^2 R\hat{i} = 0 .$$

Με άλλα λόγια, στην ύπαρξη των φυσικών δυνάμεων (Coulomb, Hooke, παγκόσμιας έλξης κ.α.) συμφωνούν και οι αδρανειακοί και οι μη αδρανειακοί παρατηρητές. Για να ερμηνεύσουν όμως τα φαινόμενα, οι μη αδρανειακοί παρατηρητές πρέπει να προσθέσουν κάποιες ψευδοδυνάμεις, στην προκειμένη περίπτωση τη φυγόκεντρο ψευδοδύναμη.

Δεν θα το αποδείξομε εμείς εδώ, αλλά είναι σχετικά εύκολο να αποδειχτεί, ότι η φυγόκεντρος ψευδοδύναμη, που ασκείται σε υλικό σημείο μάζας m, γράφεται στην πιο γενική περίπτωση ως

$$\vec{F}_c = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}), \tag{9.14}$$

όπου $\vec{r}$ είναι η διανυσματική ακτίνα του υλικού σημείου m, όπως την μετράει ο περιστρεφόμενος παρατηρητής Π, $\omega = |\vec{\omega}|$ είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής τού συστήματος τού Π ως προς ένα ακίνητο σύστημα Π_0 και η θετική φορά του άξονα περιστροφής είναι αυτή του διανύσματος $\vec{\omega}$.

Άσκηση 9.1: Θεωρήστε έναν τεράστιο κυλινδρικό διαστημικό σταθμό ακτίνας $R = 10$ km, ο οποίος περιστρέφεται περί τον άξονά του με γωνιακή ταχύτητα ω. Οι άνθρωποι που ζουν εκεί περπατούν στην κυλινδρική επιφάνεια, στο εσωτερικό του κυλίνδρου. Φυσικά δεν καταλαβαίνουν ότι ο σταθμός τους περιστρέφεται. Όπως και οι άνθρωποι στη Γη, νομίζουν ότι το Σύμπαν περιφέρεται γύρω από αυτούς. Άρα είναι μη αδρανειακοί παρατηρητές και πρέπει να θεωρήσουν ότι η φυγόκεντρος ψευδοδύναμη (9.14) υπάρχει γι αυτούς.
Α) Βεβαιωθείτε ότι η φυγόκεντρος ψευδοδύναμη (9.14) είναι κάθετη στην επιφάνεια του κυλίνδρου με κατεύθυνση προς τα έξω, είναι δηλαδή σαν βαρύτητα!
Β) Με τι γωνιακή ταχύτητα ω πρέπει να περιστρέφεται ο διαστημικός σταθμός, ώστε οι άνθρωποι που ζουν εκεί να αισθάνονται τεχνητή βαρύτητα ίση με τη βαρύτητα της Γης;
Γ) Θεωρήστε έναν αδρανειακό παρατηρητή κάπου έξω από τον διαστημικό σταθμό. Πως ερμηνεύει αυτός ότι οι άνθρωποι στον σταθμό ζουν σαν να υπήρχε βαρύτητα;

9.1.2 Δύναμη Coriolis

Όπως και τη φυγόκεντρο δύναμη, έτσι και τη δύναμη Coriolis, είναι εύκολο να την κατανοήσομε μέσω ενός απλού παραδείγματος.

Ας θεωρήσομε έναν χορευτή πάνω σε πάγο και ας εξετάσομε πρώτα ό,τι κάνει ο χορευτής ως θεατές στην κερκίδα, δηλαδή ως αδρανειακοί παρατηρητές. Με τα χέρια τού χορευτή τεντωμένα, η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι I_1 και η γωνιακή ταχύτητά του είναι ω_1. Χάριν ευκολίας μπορούμε να θεωρήσομε έναν «άυλο» χορευτή με δυο ίσες μάζες, m η καθεμιά, στα άκρα των χεριών του. Με τα χέρια του χορευτή μαζεμένα, η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I_2 < I_1$ και η γωνιακή ταχύτητά του είναι $\omega_2 = (I_1 / I_2)\,\omega_1 > \omega_1$. Ως αδρανειακοί παρατηρητές, αυτό το κατανοούμε ως διατήρηση της στροφορμής, αφού η ροπή που ασκεί ο πάγος στον χορευτή είναι αμελητέα.

Ας δούμε τώρα τα πράγματα από τη σκοπιά του χορευτή, ο οποίος χρησιμοποιεί ένα σύστημα που περιστρέφεται με αυτόν. Ας πούμε ότι για τον χορευτή, παράλληλος προς το τεντωμένο δεξί χέρι του είναι ο θετικός ημιάξονας x, από τα πόδια του προς το κεφάλι του είναι ο άξονας z και ο άξονας y είναι κάθετος στους άλλους δύο, έτσι ώστε να σχηματίζεται ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή από το στήθος του προς τις κερκίδες.

Όσο ο χορευτής έχει τεντωμένα τα χέρια του, αυτά βρίσκονται παράλληλα προς τον άξονα x. Σύστημα και χορευτής περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα ω_1, χωρίς βεβαίως ο χορευτής να καταλαβαίνει ότι περιστρέφεται. Θεωρεί τον εαυτό του και το σύστημά του x, y, z ως ακίνητα. Απλώς νομίζει ότι οι κερκίδες και οι άνθρωποι που βρίσκονται εκεί περιφέρονται γύρω από αυτόν. Όταν αρχίσει να μαζεύει τα χέρια του, παρατηρεί ότι κι αυτός αρχίζει να περιστρέφεται. Αυτό το καταλαβαίνει, διότι το δεξί του χέρι δεν είναι πλέον παράλληλο προς τον άξονα x. Ο άξονας x «μένει πίσω» από το χέρι του. Αλλά, επειδή ο χορευτής ξέρει ότι το σύστημά του x, y, z είναι ακίνητο, συμπεραίνει ότι αυτός άρχισε να περιστρέφεται «προς τα μπροστά».

Ο χορευτής ξέρει επίσης πολύ καλά ότι η δύναμη που άσκησε στα χέρια του ήταν ακτινική και οι ακτινικές δυνάμεις δεν προκαλούν ροπή ως προς την αρχή των αξόνων. Έτσι, για την περιστροφή του πρέπει να υποθέσει ότι μια αόρατη δύναμη, την οποία ονομάζει *δύναμη Coriolis*, άσκησε ροπή στα χέρια του και τον έστριψε. Όσο μαζεύει τα χέρια του, τόσο αισθάνεται ότι η δύναμη Coriolis συνεχίζει να δρα και να του αυξάνει τη γωνιακή ταχύτητα. Όταν σταματήσει να μαζεύει τα χέρια του, η γωνιακή ταχύτητά του στο σύστημά του x, y, z είναι σταθερή και ίση με $\omega = \omega_2 - \omega_1$.

Δεν θα το αποδείξομε εμείς εδώ, αλλά είναι σχετικά εύκολο να αποδειχτεί, ότι η ψευδοδύναμη Coriolis, που ασκείται σε υλικό σημείο μάζας m, γράφεται στην πιο γενική περίπτωση ως

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{u} \,, \tag{9.15}$$

όπου $\vec{u}$ είναι η ταχύτητα του υλικού σημείου m, όπως την μετράει ο περιστρεφόμενος παρατηρητής Π, $\omega = |\vec{\omega}|$ είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής τού συστήματος τού Π ως προς ένα ακίνητο σύστημα Π_0 και η θετική φορά του άξονα περιστροφής είναι αυτή του διανύσματος $\vec{\omega}$.

Άσκηση 9.2: Θεωρώντας ότι ο χορευτής <u>αρχίζει</u> να μαζεύει την σημειακή μάζα m του κάθε χεριού του με ταχύτητα $\vec{u}(0) = -u_0\hat{i}$, όπου $u_0 > 0$ είναι σταθερά, βεβαιωθείτε ότι η δύναμη Coriolis (9.15) θα τον στρίψει «προς τα μπροστά»

9.1.3 Ψευδοδύναμη λόγω γωνιακής επιτάχυνσης

Και στην προκειμένη περίπτωση, ένα απλό παράδειγμα θα βοηθήσει στην κατανόηση αυτής της ψευδοδύναμης.

Ας θεωρήσομε έναν αδρανειακό παρατηρητή Π_0 (χάριν ευκολίας ας τον θεωρήσομε ακίνητο) και μια ακίνητο ως προς αυτόν σημειακή μάζα m. Προφανώς, αφού η μάζα είναι ακίνητη, δεν ασκείται σ' αυτήν καμία δύναμη.

Ας θεωρήσομε τώρα έναν παρατηρητή Π και το σύστημά του x, y, z, που περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$. Ως παράδειγμα, ας θεωρήσομε ότι το σύστημα x, y, z και ο παρατηρητής Π κάνουν στροφική ταλάντωση με $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t) = \omega_0 \sin \gamma t\, \hat{k}$, όπου $\gamma > 0$ είναι σταθερά. Ο παρατηρητής Π βλέπει τη μάζα m να κάνει την <u>αντίθετη</u> στροφική ταλάντωση. Γνωρίζει όμως ότι καμία φυσική δύναμη δεν ασκείται στη μάζα m. Έτσι θεωρεί ότι μια αόρατη δύναμη, που την ονομάζει *δύναμη λόγω γωνιακής επιτάχυνσης*, αναγκάζει τη μάζα να κάνει την κίνηση που αυτός παρατηρεί.

Δεν θα το αποδείξομε εμείς εδώ, αλλά είναι σχετικά εύκολο να αποδειχτεί, ότι η ψευδοδύναμη λόγω γωνιακής επιτάχυνσης, που ασκείται σε υλικό σημείο μάζας m, γράφεται στην πιο γενική περίπτωση ως

$$\vec{F}_c = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,, \tag{9.16}$$

όπου $\vec{r}$ είναι η διανυσματική ακτίνα του υλικού σημείου m, όπως την μετράει ο περιστρεφόμενος παρατηρητής Π και $\dot{\vec{\omega}}$ είναι η γωνιακή επιτάχυνση τού συστήματος τού Π ως προς ένα ακίνητο σύστημα Π_0.

Άσκηση 9.3: Θεωρήστε ότι το σύστημα x, y, z και ο παρατηρητής Π κάνουν στροφική ταλάντωση με $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t) = \omega_0 \sin(\gamma t)\, \hat{k}$, όπου $\gamma > 0$ είναι σταθερά. Θεωρήστε επίσης έναν αδρανειακό παρατηρητή Π_0, ο οποίος βλέπει ένα υλικό σημείο μάζας m να είναι <u>ακίνητο</u>. Περιγράψτε τη κίνηση που θα παρατηρήσει ο παρατηρητής Π.

9.2 Γραμμικά επιταχυνόμενοι παρατηρητές

Και στην προκειμένη περίπτωση, ένα απλό παράδειγμα θα βοηθήσει στην κατανόηση της ψευδοδύναμης που πρέπει να θεωρήσουν οι παρατηρητές που έχουν γραμμική επιτάχυνση..

Ας θεωρήσομε έναν αδρανειακό παρατηρητή Π_0 (χάριν ευκολίας ας τον θεωρήσομε ακίνητο) και μια ακίνητο ως προς αυτόν σημειακή μάζα m. Προφανώς, αφού η μάζα είναι ακίνητη, δεν ασκείται σ' αυτήν καμία δύναμη.

Ας θεωρήσομε τώρα έναν παρατηρητή Π και το σύστημά του x, y, z, που επιταχύνεται σε σχέση με τον παρατηρητή Π_0 με γραμμική επιτάχυνση $\vec{a}_0 = \vec{a}_0(t)$. Ο παρατηρητής Π βλέπει τη μάζα m να επιταχύνεται προς την <u>αντίθετη</u> κατεύθυνση. Γνωρίζει όμως ότι καμία φυσική δύναμη δεν ασκείται στη μάζα m. Έτσι θεωρεί ότι μια αόρατη δύναμη, που την ονομάζει *δύναμη λόγω γραμμικής επιτάχυνσης*, αναγκάζει τη μάζα να κάνει την κίνηση που αυτός παρατηρεί. Με άλλα λόγια, για να ερμηνεύσει την κίνηση της μάζας πρέπει να δεχτεί ότι στη μάζα m ασκείται ψευδοδύναμη

$$\vec{F}_a = -m\vec{a}_0 . \qquad (9.17)$$

9.3 Μη αδρανειακοί παρατηρητές γενικά

Ας θεωρήσομε αδρανειακό παρατηρητή Π_0 και σημειακή μάζα m στη διανυσματική ακτίνα $\vec{r}_0$, στην οποία ασκείται συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$. Ο παρατηρητής Π_0 γράφει τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα για τη μάζα m ως

$$m\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = \vec{F} . \qquad (9.18)$$

Ένας μη αδρανειακός παρατηρητής Π γράφει τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα για την ίδια σημειακή μάζα m ως εξής:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - m\vec{a}_0 - m\vec{\omega}\times(\omega\times\vec{r}) - 2m\vec{\omega}\times\vec{u} - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} , \qquad (9.19)$$

όπου $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ είναι η διανυσματική ακτίνα της μάζας m, όπως τη μετράει ο Π, $\vec{u} = d\vec{r}/dt$ είναι η ταχύτητα της μάζας m, όπως τη μετράει ο Π, $\vec{F}$ είναι η συνισταμένη δύναμη όπως τη μετράει ο Π_0, $\vec{a}_0$ είναι η γραμμική επιτάχυνση του Π ως προς τον Π_0, $\vec{\omega}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του Π όπως την μετράει ο Π_0 και $\dot{\vec{\omega}}$ είναι η γωνιακή επιτάχυνση του Π όπως την μετράει ο Π_0.

9.4 Τα «παράξενα» της Γης

Λόγω του ότι ζούμε σε ένα μη αδρανειακό σύστημα, δηλαδή τη Γη, που περιστρέφεται περί τον άξονά της με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2\pi/(24\,hours)$ $= 2\pi/(24\cdot 60\cdot 60\,s) = 7{,}27\times 10^{-5}\,s^{-1}$, για να εξηγήσομε (ως <u>μη αδρανειακοί παρατηρητές</u>) αυτά που συμβαίνουν στη Γη πρέπει να λάβομε υπόψη μας τις απαιτούμενες ψευδοδυνάμεις.

Η ψευδοδύναμη λόγω γραμμικής επιτάχυνσης και η ψευδοδύναμη λόγω γωνιακής επιτάχυνσης δεν υπάρχουν. Εδώ αγνοούμε την περιφορά της Γης περί τον Ήλιο, την περιφορά του Ήλιου περί το κέντρο του Γαλαξία και την επιταχυνόμενη κίνηση του κέντρου του Γαλαξία.

Για υλικά σημεία που είναι <u>ακίνητα</u> στη Γη, πρέπει να λάβομε υπόψη μας την φυγόκεντρο ψευδοδύναμη. Αυτή είναι πολύ μικρή (να την υπολογίσετε) και συνήθως την ενσωματώνομε στην επιτάχυνση της βαρύτητας. Έτσι γράφομε

$$\vec{g} = -G\frac{M}{R^2}\hat{r} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}), \tag{9.20}$$

όπου G είναι η σταθερά παγκόσμιας έλξης, M είναι η μάζα της Γης, R είναι η ακτίνα της, $\hat{r}$ είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα στο σημείο όπου μετρούμε την επιτάχυνση της βαρύτητας, $\vec{\omega}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα της Γης και $\vec{R}$ είναι η διανυσματική ακτίνα του σημείου όπου βρισκόμαστε στην επιφάνεια της Γης. Στον συμβολισμό της εξίσωσης (9.20) το $\hat{r}$ ισούται με $\vec{R}/R$. Το μέτρο του $\vec{g}$ είναι περίπου σταθερό (διότι ο δεύτερος όρος στην εξίσωση 9.20 είναι αμελητέος) και το παίρνομε ίσο με 9.81 $\mathrm{m/s^2}$ ανεξαρτήτως του που βρισκόμαστε πάνω στη Γη. Η κατεύθυνση του $\vec{g}$ είναι $-\hat{r}$, δηλαδή προς το κέντρο της Γης.

Άσκηση 9.4: Αν η περίοδος περιστροφής της Γης δεν ήταν 24 ώρες αλλά 1 ώρα, να βρεθεί η επιτάχυνση $\vec{g}$ (εξίσωση 9.20) σε τυχόν γεωγραφικό πλάτος λ στην επιφάνεια της Γης. Υπολογίστε την αριθμητικά για $\lambda = 0$ (δηλ. στον Ισημερινό) και $\lambda = 90^o$ (δηλ. στον Βόρειο Πόλο). Θεωρήστε $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ και $\vec{R} = R(\cos\lambda\,\hat{i} + \sin\lambda\,\hat{k})$.

Για υλικά σημεία που <u>κινούνται</u> πάνω στη Γη πρέπει να λάβομε υπόψη μας την ψευδοδύναμη Coriolis. Κι αυτή είναι σχετικά μικρή, αλλά αν δρα για μεγάλα χρονικά διαστήματα έχει σημαντικά αποτελέσματα, όπως θα δούμε στο Παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 9.1: Εξηγήστε με λόγια ή/και με μαθηματικά Α) ως αδρανειακός και Β) ως μη αδρανειακός παρατηρητής:
1) Γιατί η πτώση των σωμάτων στην περιστρεφόμενη Γη δεν γίνεται κατακόρυφα.
2) Γιατί οι τυφώνες στο βόρειο ημισφαίριο περιστρέφονται με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ωρολογίου.
3) Γιατί ο καιρός μάς έρχεται από τη Δύση. Με άλλα λόγια, αν θέλομε να μάθομε χονδρικά τι καιρό θα κάνει αύριο στην Ελλάδα, κοιτάμε τι καιρό κάνει σήμερα στην Ιταλία.

Λύση: Α) Ένας αδρανειακός παρατηρητής, που βρίσκεται κάπου έξω από τη Γη, ερμηνεύει τα φαινόμενα που συμβαίνουν σε γεωγραφικό πλάτος $\lambda > 0$ (για την Αθήνα $\lambda \approx 38$ μοίρες) ως εξής:

1) Ας θεωρήσομε ένα κατακόρυφο κοντάρι ύψους h στην κορυφή του οποίου βρίσκεται ακίνητη σημειακή μάζα m. Τόσο η μάζα m όσο και η προβολή της στην επιφάνεια της Γης (δηλαδή το κάτω άκρο του κονταριού) περιστρέφονται με σταθερή <u>γωνιακή</u> ταχύτητα ω, αυτήν της Γης. Οι <u>γραμμικές</u> τους όμως ταχύτητες είναι διαφορετικές, διότι βρίσκονται σε διαφορετικές αποστάσεις από τον άξονα περιστροφής της Γης. Η μάζα m έχει <u>γραμμική</u> ταχύτητα $\omega(R+h)\cos\lambda$, ενώ το κάτω άκρο του κονταριού έχει $\omega R\cos\lambda$. Άρα, όταν αφαιρέσομε το κοντάρι, η μάζα m, που έχει μεγαλύτερη <u>γραμμική</u> ταχύτητα από το σημείο στο οποίο βρίσκονταν το κάτω άκρο του κονταριού (όχι μόνο τη χρονικά στιγμή $t = 0$, αλλά καθ' όλο το διάστημα της πτώσης Δt), θα διανύσει μεγαλύτερη απόσταση απ' ό,τι το σημείο στο οποίο βρίσκονταν το κάτω άκρο του κονταριού και επομένως θα

πέσει «μπροστά» (δηλαδή κατά τη φορά περιστροφής) από το «αναμενόμενο» σημείο, που ήταν η θέση του κάτω άκρου του κονταριού.

2) Όλα τα σημεία στην επιφάνεια της Γης έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω (αυτήν της Γης) αλλά διαφορετικές γραμμικές ταχύτητες. Η γραμμική ταχύτητα ενός σημείου στην επιφάνεια της Γης σε γεωγραφικό πλάτος λ είναι $u(\lambda) = \omega R \cos\lambda$, όπου $\omega = 7{,}27 \times 10^{-5} s^{-1}$ και $R = 6{,}37 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$ = 6370 km είναι η ακτίνα της Γης.

   Στον Ισημερινό ($\lambda = 0$) έχομε $u(0) = 463\,\mathrm{m/s}$ = 1667 km/h,
   στο Κάιρο ($\lambda \approx 30$ μοίρες) έχομε $u(30) = 1444\,\mathrm{km/h}$,
   στην Αθήνα ($\lambda \approx 38$ μοίρες) έχομε $u(38) = 1314\,\mathrm{km/h}$,
   στη Θεσσαλονίκη ($\lambda \approx 41$ μοίρες) έχομε $u(41) = 1258\,\mathrm{km/h}$,
   στο Ελσίνκι ($\lambda \approx 60$ μοίρες) έχομε $u(60) = 834\,\mathrm{km/h}$
   και φυσικά στον βόρειο πόλο ($\lambda = 90$ μοίρες) έχομε $u(90) = 0$.

   Παρατηρούμε ότι μεταξύ δυο κοντινών σχετικά σημείων (Κάιρο – Θεσσαλονίκη) υπάρχει διαφορά γραμμικής ταχύτητας ίση με 186 km/h!!! Έτσι, αν στο Κάιρο φυσάει Νοτιάς (δηλαδή από τον Νότο), ο αέρας θα φθάσει ανατολικά της Θεσσαλονίκης διότι η προς ανατολάς γραμμική ταχύτητα του αέρα στο Κάιρο ήταν μεγαλύτερη από την προς ανατολάς γραμμική ταχύτητα της Θεσσαλονίκης. (Εδώ κάναμε την παραδοχή ότι το Κάιρο και η Θεσσαλονίκη είναι στο ίδιο γεωγραφικό μήκος, που δεν είναι ακριβώς.) Αν αντιθέτως, στη Θεσσαλονίκη φυσάει Βοριάς (δηλαδή από τον Βορρά), ο αέρας θα φθάσει δυτικά του Καΐρου.

   Ας θεωρήσομε τώρα ότι στη μέση του βόρειου Ατλαντικού Ωκεανού δημιουργείται ένα Βαρομετρικό Χαμηλό (δηλαδή μικρότερη πίεση σε σχέση με τη μέση τιμή) διαμέτρου μερικών εκατοντάδων χιλιομέτρων. Αέρας από όλες τις κατευθύνσεις θα κινηθεί προς το Βαρομετρικό Χαμηλό για να εξισορροπήσει την πίεση. Όμως, όπως είδαμε παραπάνω, ο Νοτιάς στρίβει ‘δεξιά’ και ο Βοριάς στρίβει ‘αριστερά’. Έτσι δημιουργείται ανεμοστρόβιλος που περιστρέφεται αντίθετα των δεικτών του ωρολογίου.

3) Οι κύριοι άνεμοι στην εύκρατη ζώνη του βορείου ημισφαιρίου είναι Νότιοι (παρεμπιπτόντως αναφέρομε ότι στην πολική και στην ισημερινή ζώνη είναι Βόρειοι). Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι Νότιοι άνεμοι στρίβουν ‘δεξιά’, δηλαδή προς ανατολάς. Έτσι ο καιρός στην Ελλάδα μάς έρχεται από τη Δύση. Στο επόμενο ταξίδι σας στην ισημερινή ή στην πολική ζώνη θα δείτε ότι ο καιρός εκεί τους έρχεται από την Ανατολή.

.

Β) Ένας μη αδρανειακός παρατηρητής, που βρίσκεται κάπου πάνω τη Γη, ερμηνεύει τα φαινόμενα που συμβαίνουν ως εξής:

1) Η μάζα m δεν πέφτει κατακόρυφα, διότι πάνω της ασκείται η δύναμη Coriolis $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{u}$, που το εκτρέπει από την κατακόρυφο. Εδώ $\vec{u}$ είναι

η ταχύτητα της μάζας m, όπως τη μετράει ο μη αδρανειακός παρατηρητής και $\vec{\omega}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης.

2) Αν $\vec{u}$ είναι η ταχύτητα του ανέμου, όπως τη μετράει ο μη αδρανειακός παρατηρητής, τότε σε κάθε μόριο μάζας m του ανέμου ασκείται δύναμη Coriolis $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega}\times\vec{u}$, όπου $\vec{\omega}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης. Η δύναμη αυτή στρίβει τον Νοτιά προς τα 'δεξιά' και τον Βοριά προς τα 'αριστερά'. Έτσι δημιουργείται ανεμοστρόβιλος, που περιστρέφεται αντίθετα των δεικτών του ωρολογίου.

3) Όπως είπαμε ήδη, ο κύριος άνεμος στη εύκρατη ζώνη είναι Νοτιάς. Λόγω της δύναμης Coriolis, ο Νοτιάς στρίβει προς ανατολάς. Έτσι ο καιρός στην εύκρατη ζώνη μάς έρχεται από δυσμάς.

9.5 «Έλλειψη βαρύτητας» στον διαστημικό σταθμό

Σχεδόν πάντοτε, τα μέσα ενημέρωσης (και όχι μόνο!) αναφέρουν ότι «η βαρύτητα στον διαστημικό σταθμό είναι μηδέν και γι' αυτό οι αστροναύτες εκεί μπορούν να αιωρούνται». Με άλλα λόγια λένε ότι «υπάρχει έλλειψη βαρύτητας στον διαστημικό σταθμό». Αυτό είναι τελείως λάθος!!! Ας υπολογίσομε πόση είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας της Γης εκεί.
Η επιτάχυνση της βαρύτητα στην επιφάνεια της Γης [αγνοώντας τη συνεισφορά της φυγόκεντρης δύναμης (εξίσωση 9.20), που είναι πολύ μικρή] είναι

$$\vec{g} = -G\frac{M}{R^2}\hat{r}, \qquad (9.21)$$

και έχει μέτρο $g = GM/R^2 \approx 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. Στον διαστημικό σταθμό, που βρίσκεται σε ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης, η επιτάχυνση της βαρύτητας της Γης είναι

$$\vec{g} = -G\frac{M}{(R+h)^2}\hat{r}, \qquad (9.22)$$

που όχι μόνο δεν είναι μηδέν, αλλά έχει τιμή λίγο πιο μικρή από το $9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, αφού το $h \approx 420$ km είναι πολύ μικρότερο από το $R \approx 6400$ km. Είναι σημαντικό λοιπόν να κατανοήσομε γιατί οι αστροναύτες αιωρούνται στον διαστημικό σταθμό.

Άσκηση 9.5: Α) Υπολογίστε πόση είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας της Γης στον διαστημικό σταθμό.
Β) Εξηγήστε ως αδρανειακός παρατηρητής τι συμβαίνει στους αστροναύτες του διαστημικού σταθμού.
Γ) Εξηγήστε ως αστροναύτης (δηλαδή ως μη αδρανειακός παρατηρητής) του διαστημικού σταθμού τι συμβαίνει εκεί πέρα.
Δ) Υπολογίστε την επιτάχυνση της βαρύτητας του Ήλιου στην επιφάνεια της Γης.
Ε) Υπολογίστε την επιτάχυνση της βαρύτητας του Δία στην επιφάνεια της Γης.