

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

### Ροπή και Στροφορμή – Μέρος δεύτερο

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο εξετάσαμε την περιστροφή στερεού σώματος περί σταθερό άξονα. Εδώ θα εξετάσουμε την εξίσωση κίνησης στερεού σώματος γενικώς. Πριν το κάνουμε αυτό όμως, καλό είναι να γράψουμε την εξίσωση κίνησης υλικού σημείου στον χώρο με τη βοήθεια της ροπής δύναμης και της στροφορμής.

#### 8.1 Κίνηση υλικού σημείου

Ας θεωρήσουμε σύστημα συντεταγμένων  $xyz$  και υλικό σημείο μάζας  $m$  που κινείται στον χώρο υπό την επίδραση δύναμης  $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$ . Η διανυσματική ακτίνα του υλικού σημείου την τυχούσα χρονική στιγμή είναι  $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$ . Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, η εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου είναι

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (8.1)$$

όπου  $\vec{p} = m\vec{u} = m d\vec{r} / dt$  είναι η ορμή του υλικού σημείου. Με βάση όσα είδαμε στο Κεφάλαιο 7, ορίζουμε τη *στροφορμή του υλικού σημείου ως προς την αρχή των αξόνων* ως

$$\begin{aligned} \vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} &= (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) \times (p_x \hat{i} + p_y \hat{j} + p_z \hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \\ &= (yp_z - zp_y) \hat{i} + (zp_x - xp_z) \hat{j} + (xp_y - yp_x) \hat{k}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούμε την έκφραση (8.2) για τη στροφορμή. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του δεξιού χεριού ή ισοδύναμα τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία, βρίσκουμε εύκολα την κατεύθυνση του διανύσματος της στροφορμής. Το μέτρο της στροφορμής δίνεται από μια από τις σχέσεις (6.3).

Ομοίως, ορίζουμε τη *ροπή της δύναμης  $\vec{F}$  ως προς την αρχή των αξόνων* ως

$$\begin{aligned} \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} &= (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) \times (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= (yF_z - zF_y) \hat{i} + (zF_x - xF_z) \hat{j} + (xF_y - yF_x) \hat{k}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούμε την έκφραση (8.3) για τη ροπή. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του δεξιού χεριού ή ισοδύναμα τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλίου, βρίσκουμε εύκολα την κατεύθυνση του διανύσματος της ροπής. Το μέτρο της ροπής δίνεται από μια από τις σχέσεις (6.3).

Ας εξετάσουμε τώρα τη χρονική μεταβολή της στροφορμής του υλικού σημείου. Παραγωγίζοντας αμφότερα τα μέλη της (8.2) έχουμε

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (8.4)$$

Όμως, ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της (8.4) ισούται με μηδέν διότι τα διανύσματα  $d\vec{r}/dt$  και  $\vec{p}$  είναι συγγραμμικά. Συνεπώς, με τη χρήση της (8.1), η (8.4) γίνεται

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}. \quad (8.5)$$

Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι η εξίσωση (8.5) δεν είναι τίποτε άλλο παρά ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα (8.1) γραμμένος με άλλη μορφή. Το πλεονέκτημα της μορφής (8.5) είναι ότι αν η ροπή της δύναμης  $\vec{F}$  είναι μηδέν, τότε η στροφορμή του υλικού σημείου είναι σταθερή, δηλαδή διατηρείται, πράγμα που δεν είναι εμφανές από την εξίσωση (8.1).

**Άσκηση 8.1:** Δείξτε ότι η στροφορμή υλικού σημείου διατηρείται σε οποιοδήποτε κεντρικό πεδίο δυνάμεων και αν κινείται. Σχολιάστε τις κινήσεις των πλανητών γύρω από τον Ήλιο.

## 8.2 Κίνηση στερεού σώματος

Ας θεωρήσουμε ότι το στερεό σώμα αποτελείται από  $N$  υλικά σημεία  $1, 2, 3, \dots, N$  με μάζες  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$ , αντιστοίχως, που βρίσκονται την τυχούσα χρονική στιγμή στις αντίστοιχες διανυσματικές ακτίνες  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N$ . Ας υποθέσουμε ότι το υλικό σημείο  $j$  ασκεί στο υλικό σημείο  $i$  δύναμη  $\vec{F}_{ji}$ , όπου  $1 \leq i \neq j \leq N$ .

Επίσης, ας θεωρήσουμε ότι στο υλικό σημείο  $i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , ασκείται εξωτερική δύναμη  $\vec{F}_i$ . Η ροπή των δυνάμεων που ασκούνται στο υλικό σημείο  $i$ , ως προς την αρχή των αξόνων, είναι

$$\vec{\tau}_i \equiv \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} \quad (8.6)$$

και η ολική ροπή που ασκείται στο σύστημα των  $N$  υλικών σημείων ως προς την αρχή των αξόνων είναι

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} \right). \quad (8.7)$$

Οι όροι στο διπλό άθροισμα είναι της μορφής

$$\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\beta\alpha} + \vec{r}_\beta \times \vec{F}_{\alpha\beta} = \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\beta\alpha} + \vec{r}_\beta \times (-\vec{F}_{\beta\alpha}) = (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \times \vec{F}_{\beta\alpha}. \quad (8.8)$$

Επειδή όμως στα στερεά σώματα η δύναμη που ασκείται μεταξύ των ιόντων που τα αποτελούν είναι κατά μήκος της ευθείας που τα ενώνει (δηλαδή  $\vec{F}_{\beta\alpha}$  είναι παράλληλη προς το  $\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta$ , οι όροι στο διπλό άθροισμα κάνουν μηδέν ανά δυο. Έτσι, η εξίσωση (8.7) γράφεται ως

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i \right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{\ell}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (8.9)$$

όπου  $\vec{\ell}_i$  είναι η στροφορμή του  $i$  υλικού σημείου και  $\vec{L}$  είναι η στροφορμή του στερεού σώματος ως προς την αρχή των αξόνων. Έτσι αποδείξαμε ότι αν σε ένα στερεό σώμα ασκείται συνολική ροπή  $\vec{\tau}$  ως προς την αρχή των αξόνων και η στροφορμή του είναι  $\vec{L}$  ως προς την αρχή των αξόνων, τότε η εξίσωση κίνησης του στερεού σώματος είναι

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (8.10)$$

Τονίστηκε το ως προς την αρχή των αξόνων, διότι δεν έχει νόημα ούτε η ροπή ούτε η στροφορμή αν δεν πούμε ως προς ποιο σημείο ορίζονται.

Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι η εξίσωση κίνησης (8.10) προέκυψε από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα για καθένα από τα σωματίδια που συνθέτουν το στερεό σώμα. Με άλλα λόγια, αν θέλουμε κατά την κίνηση ενός στερεού σώματος τα επιμέρους σωματίδιά του να υπακούουν στον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα κατά την κίνησή τους, τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (8.10) για τη μελέτη της κίνησης του στερεού σώματος.

### 8.2.1 Διατήρηση στροφορμής

Είναι εμφανές από την εξίσωση (8.10) ότι αν δεν ασκείται ροπή σε ένα στερεό σώμα, το διάνυσμα (όχι μόνο το μέτρο) της στροφορμής του είναι σταθερό. Και η ροπή και η στροφορμή υπονοούνται ως προς την αρχή των αξόνων.

**Παράδειγμα 8.1:** Ας θεωρήσουμε έναν χορευτή πάνω σε πάγο. Αν με τεντωμένα τα χέρια του έχει ροπή αδράνειας  $I_1$  ως προς τον άξονα περιστροφής του και γωνιακή ταχύτητα  $\omega_1$ , τότε η στροφορμή του είναι  $\vec{L}_1 = I_1 \omega_1 \hat{k}$ , όπου θεωρήσαμε τον άξονα  $z$  ως τον άξονα περιστροφής και την κατανομή της μάζας του σώματός του συμμετρική ως προς τον άξονα  $z$ . Αν με μαζεμένα τα χέρια του έχει ροπή αδράνειας  $I_2$  ως προς τον άξονα  $z$ , να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητά του  $\omega_2$ .

**Λύση:** Θεωρούμε ότι οι τριβές των παγοπέδλων στο δάπεδο είναι αμελητέες. Άρα δεν ασκείται ροπή στον χορευτή και επομένως η στροφορμή του διατηρείται. Έτσι γράφουμε  $\vec{L}_1 = I_1 \omega_1 \hat{k} = I_2 \omega_2 \hat{k} = \vec{L}_2$ . Συνεπώς,  $\omega_2 = (I_1 / I_2) \omega_1$ .

### 8.2.2 Διατήρηση στροφορμής και κινητική ενέργεια

Ας θεωρήσουμε ξανά το Παράδειγμα 8.1. Σύμφωνα με την εξίσωση (7.23), η κινητική ενέργεια του χορευτή είναι αρχικά  $T_1 = (1/2)I_1\omega_1^2$  και τελικά  $T_2 = (1/2)I_2\omega_2^2$ . Η τελική κινητική ενέργεια του χορευτή γράφεται ως  $T_2 = (1/2)I_2\omega_2^2 = (1/2)(I_2\omega_2)\omega_2 = (1/2)(I_1\omega_1)\omega_2 > (1/2)I_1\omega_1^2 = T_1$ , όπου χρησιμοποιήσαμε τη διατήρηση της στροφορμής.

Τι είναι αυτό που προκάλεσε αύξηση της κινητικής ενέργειας του χορευτή; Για να το κατανοήσουμε, ας θεωρήσουμε μια απλουστευμένη εκδοχή του χορευτή στον πάγο και ας λύσουμε την παρακάτω άσκηση. Η απλούστευση γίνεται για να μπορέσουμε να ποσοτικοποιήσουμε τη ροπή αδράνειας του χορευτή.

**Άσκηση 8.2:** Θεωρήστε «άυλο» χορευτή που κρατά σε κάθε χέρι του μια μάζα  $m$ . Οι μάζες βρίσκονται αρχικά σε απόσταση  $r_1$  από τον άξονα περιστροφής και τελικά σε απόσταση  $r_2$ . Αρχικά η γωνιακή ταχύτητα του χορευτή είναι  $\omega_1 = \omega(r_1)$  και τελικά είναι  $\omega_2 = \omega(r_2)$ .

A) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα  $\omega(r)$  του χορευτή όταν οι μάζες βρίσκονται σε τυχούσα απόσταση  $r$  από τον άξονα περιστροφής, όπου  $r_2 \leq r \leq r_1$ .

B) Να βρεθεί μεταβολή  $\Delta T = T_2 - T_1$  της κινητικής ενέργειας του χορευτή.

Γ) Να δείξετε ότι το έργο που κάνει η κεντρομόλος δύναμη  $\vec{F}(r) = -m\omega^2(r) r \hat{r}$  στις σημειακές μάζες  $m$  κατά την ακτινική μετακίνησή τους από την αρχική ακτίνα  $r = r_1$  στην τελική  $r = r_2$  ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του χορευτή.

## 8.3 Χρήσιμα θεωρήματα

### 8.3.1 Στροφορμή

Για να βρίσκουμε σχετικά εύκολα τη στροφορμή  $\vec{L}$  ενός στερεού σώματος, θα διαχωρίσουμε τις συνεισφορές στο  $\vec{L}$  από την κίνηση του κέντρου μάζας του σώματος και από την στροφορμή του σώματος ως προς το κέντρο μάζας.

Ας θεωρήσουμε  $N$  υλικά σημεία  $1, 2, 3, \dots, N$  με μάζες  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$ , αντιστοίχως, που βρίσκονται την τυχούσα χρονική στιγμή στις αντίστοιχες διανυσματικές ακτίνες  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N$ . Τα υλικά σημεία μπορεί να είναι σωματίδια ενός στερεού σώματος ή ανεξάρτητα σωματίδια. Έστω ότι η διανυσματική ακτίνα του κέντρου μάζας των  $N$  υλικών σημείων (ας τα θεωρήσουμε ως στερεό σώμα) είναι την τυχούσα χρονική στιγμή  $\vec{R}$ . Τότε τη διανυσματική ακτίνα του  $i$  υλικού σημείου γράφεται ως

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i^*, \quad (8.11)$$

όπου  $\vec{r}_i^*$  είναι η διανυσματική ακτίνα του υλικού σημείου  $i$  ως προς το κέντρο μάζας. Με άλλα λόγια, θεωρούμε δυο συστήματα συντεταγμένων: Ένα το  $x, y, z$  με αρχή το σημείο  $O(0, 0, 0)$  και ένα το  $x^*, y^*, z^*$  με αρχή το κέντρο μάζας. Είναι προφανές ότι το σύστημα  $x^*, y^*, z^*$  κινείται καθώς το στερεό σώμα κινείται.

Με παραγωγή της (8.11) ως προς χρόνο έχουμε

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^*, \quad (8.12)$$

όπου, όπως συνηθίζεται χάριν συντομογραφίας, την παράγωγο ως προς τον χρόνο τη συμβολίσαμε με μια τελεία · πάνω από την υπό παραγωγή ποσότητα. Έτσι, η στροφορμή  $\vec{L}$  ενός στερεού σώματος γράφεται ως

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{R} + \vec{r}_i^*) \times (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^*), \quad (8.13)$$

που με πράξεις γίνεται ίση με

$$\left( \sum_{i=1}^N m_i \right) \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \left( \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^* \right) \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^* \right) + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^* \times \dot{\vec{r}}_i^*. \quad (8.14)$$

Η παρένθεση στον πρώτο όρο της (8.14) είναι ίση με τη μάζα  $M$  του στερεού σώματος. Ο δεύτερος όρος στην (8.14) είναι ίσος με μηδέν διότι η ποσότητα

$$\frac{1}{M} \left( \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^* \right) = \vec{R}^* = 0$$

είναι η διανυσματική ακτίνα του κέντρου μάζας ως προς το κέντρο μάζας, δηλαδή ως προς το σύστημα  $x^*, y^*, z^*$ . Το κέντρο μάζας είναι στην αρχή του συστήματος  $x^*, y^*, z^*$  και επομένως έχει διανυσματική ακτίνα  $\vec{R}^* = 0$ .

Ομοίως, ο τρίτος όρος είναι μηδέν, διότι η παρένθεση είναι η χρονική παράγωγος του μηδενικού διανύσματος  $\vec{R}^* = 0$ . Έτσι, η (8.14) γράφεται ως

$$\vec{L} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^* \times \dot{\vec{r}}_i^* \quad (8.15)$$

ή

$$\vec{L} = \vec{R} \times M\dot{\vec{R}} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^* \times m_i \dot{\vec{r}}_i^* = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^* \times \vec{p}_i^* \quad (8.16)$$

και επομένως αποδείξαμε το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 8.1:** Η στροφορμή  $\vec{L}$  στερεού σώματος ως προς την αρχή των αξόνων ισούται με τη στροφορμή του κέντρου μάζας του (όπου θεωρούμε συγκεντρωμένη όλη τη μάζα) ως προς την αρχή των αξόνων  $\vec{L}_{KM}$  συν τη στροφορμή του σώματος ως προς το κέντρο μάζας του  $\vec{L}^*$ , δηλαδή

$$\vec{L} = \vec{L}_{KM} + \vec{L}^* \quad (8.17)$$

Ο πρώτος όρος είναι στροφορμή υλικού σημείου, που είναι εύκολη να υπολογιστεί. Ο δεύτερος όρος είναι η στροφορμή στερεού σώματος ως προς το κέντρο μάζας του, που επίσης είναι σχετικά εύκολη να υπολογιστεί, διότι δεν μας ενδιαφέρει αν το κέντρο μάζας είναι ακίνητο ή κινείται. Επομένως, πρόκειται για περιστροφή περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας και δεν μας ενδιαφέρει αν ο άξονας κινείται ή είναι σταθερός.

Παρατήρηση 1: Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι η έκφραση (8.17) ισχύει ανεξαρτήτως του τι κίνηση κάνει το κέντρο μάζας! Ακόμη κι αν το κέντρο μάζας επιταχύνεται, η σχέση (8.17) ισχύει. Με άλλα λόγια, το  $\vec{L}^*$ , δηλαδή τη στροφορμή λόγω περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας, την υπολογίζουμε απλώς θεωρώντας ότι το κέντρο μάζας βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής. Έτσι, σε όλα τα προβλήματα όπου το στερεό έχει άξονα συμμετρίας και η περιστροφή γίνεται περί τον άξονα συμμετρίας,  $\vec{L}^* = I^* \vec{\omega}$ , όπου  $I^*$  είναι η ροπή αδράνειας του στερεού σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και  $\vec{\omega}$  είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του. Το διάνυσμα  $\vec{\omega}$  έχει την κατεύθυνση του άξονα περιστροφής, που είναι και άξονας συμμετρίας του στερεού. Για παράδειγμα, θεωρήστε την κύλιση χωρίς ολίσθηση ενός κυλίνδρου.

**Αν ο άξονας περιστροφής δεν είναι άξονας συμμετρίας, τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την πιο γενική έκφραση που δίνεται στο υποκεφάλαιο 8.5.**

Παρατήρηση 2: Η εξίσωση (8.17) δεν σημαίνει ότι σε όλα τα προβλήματα θα υπάρχει και το  $\vec{L}_{KM}$  και το  $\vec{L}^*$ . Αν το κέντρο μάζας είναι ακίνητο, τότε  $\vec{L}_{KM} = 0$ , π.χ. περιστροφή μιας τροχαλίας περί σταθερό άξονα. Ομοίως, αν το στερεό σώμα δεν περιστρέφεται, τότε  $\vec{L}^* = 0$ , π.χ. ένας κυκλικός δίσκος γλιστρά σε ένα δάπεδο, αλλά δεν κυλιέται. Τέλος, ένας κυκλικός δίσκος που κυλιέται έχει και  $\vec{L}_{KM}$  και  $\vec{L}^*$  (βλ. Παράδειγμα 8.2).

### 8.3.2 Κινητική ενέργεια

Ανάλογο θεώρημα προς το θεώρημα 1 ισχύει για την κινητική ενέργεια στερεού σώματος. Η κινητική ενέργεια στερεού σώματος είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των σωματίων που συνθέτουν το σώμα. Έτσι γράφουμε

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \quad (8.18)$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση (8.12) η σχέση (8.18) γράφεται ως

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^*) \cdot (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^*) \\ &= \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \right) \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^* \right) \cdot \dot{\vec{R}} + \frac{1}{2} \dot{\vec{R}} \cdot \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^* \right) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{*2} \end{aligned} \quad (8.19)$$

Ο δεύτερος και ο τρίτος όρος είναι μηδέν και επομένως η (8.19) γράφεται ως

$$T = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^{*2} . \quad (8.20)$$

Έτσι αποδείξαμε το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 8.2:** Η κινητική ενέργεια  $T$  στερεού σώματος ισούται με την κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας του (όπου θεωρούμε συγκεντρωμένη όλη τη μάζα)  $T_{KM}$  συν την κινητική ενέργεια του σώματος γύρω από το κέντρο μάζας του  $T^*$ , δηλαδή

$$T = T_{KM} + T^* . \quad (8.21)$$

Παρατήρηση 1: Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι η έκφραση (8.21) ισχύει ανεξαρτήτως του τι κίνηση κάνει το κέντρο μάζας! Ακόμη κι αν το κέντρο μάζας επιταχύνεται, η σχέση (8.21) ισχύει.

Με άλλα λόγια, το  $T^*$ , δηλαδή την περιστροφική ενέργεια γύρω από το κέντρο μάζας, την υπολογίζουμε απλώς θεωρώντας ότι το κέντρο μάζας βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής. Έτσι, σε όλα τα προβλήματα όπου το στερεό έχει άξονα συμμετρίας και η περιστροφή γίνεται περί τον άξονα συμμετρίας,  $T^* = (1/2)I^* \omega^2$ , όπου  $I^*$  είναι η ροπή αδράνειας του στερεού σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και  $\omega = |\vec{\omega}|$  είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του. Το διάνυσμα  $\vec{\omega}$  έχει την κατεύθυνση του άξονα περιστροφής, που είναι και άξονας συμμετρίας του στερεού. Για παράδειγμα, θεωρήστε την κύλιση ενός κυλίνδρου.

**Αν ο άξονας περιστροφής δεν είναι άξονας συμμετρίας, τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την πιο γενική έκφραση που δίνεται στο υποκεφάλαιο 8.5.**

Παρατήρηση 2: Είναι επίσης σημαντικό να κατανοήσουμε ότι σε ένα Λούνα Παρκ, το βαγόνι με τους επιβάτες του δεν είναι υλικό σημείο, αλλά στερεό σώμα. Έτσι, σε προβλήματα ανακύκλωσης, δεν υπεισέρχεται μόνο το  $T_{KM}$ , αλλά και το  $T^*$ . Χάρην ευκολίας, θεωρούμε ότι το βαγόνι δεν έχει τροχούς και απλώς γλιστρά χωρίς τριβές. Καθώς το βαγόνι κάνει μια περιφορά στην κυκλική τροχιά της ανακύκλωσης, κάνει και μια περιστροφή περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Αυτό το καταλαβαίνουμε ως εξής: Αν βρισκόμαστε κάτω από την ανακύκλωση, αρχικά βλέπουμε τα πόδια των επιβατών, ενώ όταν το βαγόνι βρίσκεται στο ψηλότερο σημείο της ανακύκλωσης βλέπουμε τα κεφάλια των επιβατών. Γενικά, η εικόνα του βαγονιού με τους επιβάτες που βλέπουμε αλλάζει ανάλογα με τη θέση του βαγονιού, αλλά σε μια ανακύκλωση βλέπουμε το βαγόνι και τους επιβάτες από όλες τις πλευρές, μια φορά την κάθε πλευρά. Έτσι, η γωνιακή ταχύτητα περιφοράς του βαγονιού στην κυκλική τροχιά ισούται με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του βαγονιού περί τον άξονά του.

Παρατήρηση 3: Η Παρατήρηση 2 δεν σημαίνει ότι όλα τα στερεά σώματα που κάνουν μια περιφορά κάνουν υποχρεωτικά και μια περιστροφή περί τον άξονά τους. Μπορεί να μην κάνουν καμία (όπως π.χ. τα κρεμαστά καθίσματα σε έναν

κατακόρυφο περιστρεφόμενο κύκλο στα Λούνα Παρκ) ή να κάνουν περισσότερες της μίας (όπως π.χ. οι τροχοί του βαγονιού που κάνει ανακύκλωση).

**Παράδειγμα 8.2:** Θεωρείστε ότι ένα κέρμα μάζας  $M$  ακτίνας  $R$  και αμελητέου πάχους κυλίνεται (χωρίς να ολισθαίνει) κατά μήκος του άξονα  $x$  με σταθερή ταχύτητα  $u_0 > 0$ . Να βρεθεί η κινητική ενέργειά του και η στροφορμή του ως προς την αρχή των αξόνων.

**Λύση:** Η κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας του κέρματος είναι  $T_{KM} = \frac{1}{2} M u_0^2$ .

Θεωρώντας ότι η περιστροφή του κέρματος γίνεται περί τον άξονα  $y^*$ , που είναι παράλληλος προς τον άξονα  $y$  και διέρχεται από το κέντρο μάζας του, έχουμε από την (7.22) ότι

$$T^* = \frac{1}{2} I^* \omega^2,$$

όπου  $I^*$  είναι η ροπή αδράνειας του κέρματος ως προς τον άξονα  $y^*$  και  $\omega = u_0 / R$ . Επειδή το κέρμα είναι ομογενές, η πυκνότητά του (μάζα ανά επιφάνεια) είναι

$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$  και η  $I^*$  είναι

$$I^* = \int_0^M r^2 dm = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi r dr = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2.$$

Έτσι, η κινητική ενέργεια του κέρματος είναι

$$T = T_{KM} + T^* = \frac{1}{2} M u_0^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} MR^2 \frac{u_0^2}{R^2} = \frac{3}{4} M u_0^2.$$

Η κατεύθυνση της στροφορμής  $\vec{L}_{KM}$  του κέντρου μάζας του κέρματος μπορεί να βρεθεί εύκολα με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Αν θεωρήσουμε ότι ο άξονας  $z$  είναι προς τα πάνω και ο άξονας  $x$  προς τα δεξιά, τότε το διάνυσμα της  $\vec{L}_{KM}$  έχει κατεύθυνση προς τα μέσα, δηλαδή  $\hat{j}$ . Το μέτρο της  $\vec{L}_{KM}$  είναι  $R M u_0$ . Αν θέλαμε να βρούμε το διάνυσμα της στροφορμής με διανύσματα μέσω του ορισμού (8.2) θα γράφαμε

$$\vec{L}_{KM} = \vec{r}_{KM} \times \vec{p}_{KM} = (x\hat{i} + R\hat{k}) \times (M u_0 \hat{i}) = R M u_0 \hat{j}.$$

Η στροφορμή  $\vec{L}^*$  του κέρματος περί το κέντρο μάζας του είναι

$$\vec{L}^* = I^* \omega \hat{j} = \frac{1}{2} MR^2 \frac{u_0}{R} \hat{j} = \frac{1}{2} M R u_0 \hat{j}.$$

Συνεπώς, η ολική στροφορμή του κέρματος είναι



$$\vec{L} = \vec{L}_{KM} + \vec{L}^* = \frac{3}{2}RMu_0\hat{j}.$$

### 8.3.3 Ροπή

Κατ' αναλογία προς τα δυο παραπάνω θεωρήματα, θα δούμε τώρα ότι ισχύει αντίστοιχο θεώρημα για τη ροπή. Η ροπή που ασκείται σε ένα στερεό σώμα είναι το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα. Έτσι, με τη χρήση των (8.17) και (8.16) έχουμε

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}^*) = \frac{d}{dt}\left(\vec{R} \times M \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{L}^*\right) \\ &= \frac{d\vec{R}}{dt} \times M \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{R} \times M \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{L}^*}{dt}.\end{aligned}\quad (8.22)$$

Ο πρώτος όρος είναι ίσος με μηδέν διότι είναι το εξωτερικό γινόμενο συγγραμμικών διανυσμάτων. Για τον δεύτερο όρο χρησιμοποιούμε τη σχέση (4.16). Έτσι έχουμε

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \frac{d\vec{L}^*}{dt}.\quad (8.23)$$

Έχουμε όμως δει στις σχέσεις (8.7) και (8.8) ότι για εσωτερικές δυνάμεις της μορφής  $\vec{F}_{\beta\alpha}$  συγγραμμικές προς τα  $\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta$  μόνο οι εξωτερικές δυνάμεις συνεισφέρουν στη ροπή, δηλαδή

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i.\quad (8.24)$$

Συνεπώς, από τις εξισώσεις (8.23) και (8.24) έχουμε

$$\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{R} \times \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \frac{d\vec{L}^*}{dt}\quad (8.25)$$

ή

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{R}) \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i.\quad (8.26)$$

Συνεπώς, η (8.23) γράφεται ως

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i\quad (8.27)$$

και έτσι αποδείξαμε το ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 8.3:** Η ροπή  $\vec{\tau}$  όλων των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα στερεό σώμα ως προς την αρχή των αξόνων ισούται με τη ροπή της συνισταμένης

δύναμης (που θεωρούμε ότι εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας)  $\vec{\tau}_{KM}$  ως προς την αρχή των αξόνων, συν τη ροπή  $\vec{\tau}^*$  των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το κέντρο μάζας του σώματος, δηλαδή

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{KM} + \vec{\tau}^*, \quad (8.28)$$

όπου  $\vec{\tau}_{KM} = \vec{R} \times \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$  και  $\vec{\tau}^* = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i$ .

Έτσι, η εξίσωση κίνησης στερεού σώματος (8.10) γράφεται με τη χρήση των (8.17) και (8.28) ως

$$\vec{\tau}_{KM} + \vec{\tau}^* = \frac{d}{dt} (\vec{L}_{KM} + \vec{L}^*). \quad (8.29\alpha)$$

Επειδή όμως η κίνηση του κέντρου μάζας είναι κίνηση υλικού σημείου, με βάση την εξίσωση (8.5) και το Θεώρημα 4.2 μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{\tau}_{KM} = \frac{d\vec{L}_{KM}}{dt}, \quad (8.29\beta)$$

που συνεπάγεται ότι

$$\vec{\tau}^* = \frac{d\vec{L}^*}{dt}. \quad (8.29\gamma)$$

**Παράδειγμα 8.3:** Θεωρήστε κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης  $\theta$ . Θεωρήστε επίσης ότι ένα κέρμα μάζας  $M$  και ακτίνας  $R$  κυλίνεται (λόγω του βάρους του) χωρίς να γλιστρά κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

A) Να βρεθεί η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κέρματος.

B) Να βρεθεί η δύναμη τριβής μεταξύ του κέρματος και του κεκλιμένου επιπέδου.

**Λύση:** A) Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων  $xyz$ , με τον άξονα  $x$  παράλληλο προς το κεκλιμένο επίπεδο (με θετική κατεύθυνση από το ψηλότερο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου προς το χαμηλότερο), τον άξονα  $y$  κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο και τον άξονα  $z$  κάθετο στους άλλους δυο, ώστε να σχηματίζεται δεξιόστροφο σύστημα. Η αρχή των αξόνων είναι στο χαμηλότερο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου.

Την τυχούσα χρονική στιγμή το κέντρο μάζας του κέρματος έχει διανυσματική ακτίνα  $\vec{r}_{KM} = x_{KM} \hat{i} + R \hat{j}$  και ταχύτητα  $\vec{u}_{KM} = \dot{\vec{r}}_{KM} = \dot{x}_{KM} \hat{i}$ . Το  $x_{KM}$  είναι αλγεβρική ποσότητα και στη συγκεκριμένη περίπτωση έχει αρνητική τιμή. Το βάρος  $\vec{B}$  του σώματος αναλύεται στους άξονες  $x$  και  $y$  ως  $\vec{B} = Mg \sin \theta \hat{i} - Mg \cos \theta \hat{j}$ . Η  $y$  συνιστώσα αλληλοαναιρείται από την αντίδραση του επιπέδου. Για να μην ολισθαίνει το κέρμα, πρέπει να του ασκείται δύναμη τριβής  $\vec{F}_{\tau\phi} = -F_{\tau\phi} \hat{i}$ , με  $F_{\tau\phi} > 0$ .

Η ροπή που ασκείται στο κέρμα είναι  $\vec{\tau} = \vec{\tau}_{KM} + \vec{\tau}^*$ , όπου

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_{KM} &= \vec{r}_{KM} \times (Mg \sin \theta - F_{\tau\phi}) \hat{i} = (x_{KM} \hat{i} + R \hat{j}) \times (Mg \sin \theta - F_{\tau\phi}) \hat{i} \\ &= R(Mg \sin \theta - F_{\tau\phi})(-\hat{k}) = -R(Mg \sin \theta - F_{\tau\phi}) \hat{k}.\end{aligned}$$

Αυτό που κάναμε εδώ ήταν να φανταστούμε ότι όλες οι εξωτερικές δυνάμεις ασκούνται στο κέντρο μάζας (κάναμε δηλαδή μια νοερή μετατόπιση της δύναμης τριβής στο κέντρο μάζας) και υπολογίσαμε τη ροπή τους ως προς την αρχή των αξόνων.

Για τη ροπή ως προς το κέντρο μάζας έχουμε

$$\vec{\tau}^* = \vec{r}^* \times \vec{F}_{\tau\phi} = (-R \hat{j}) \times (-F_{\tau\phi} \hat{i}) = -RF_{\tau\phi} \hat{k},$$

διότι μόνο η δύναμη τριβής έχει μη μηδενική ροπή ως προς το κέντρο μάζας. Το βάρος έχει μηδενική ροπή ως προς το κέντρο μάζας.

Έτσι,

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{KM} + \vec{\tau}^* = -RMg \sin \theta \hat{k}.$$

Παρατηρούμε ότι το ίδιο αποτέλεσμα θα παίρναμε αν δεν αναλύαμε το  $\vec{\tau}$  σε  $\vec{\tau}_{KM}$  και  $\vec{\tau}^*$ , διότι στο σύστημα που επιλέξαμε η ροπή της  $\vec{F}_{\tau\phi}$  ως προς την αρχή των αξόνων είναι μηδέν.

Η στροφορμή του κέρματος είναι  $\vec{L} = \vec{L}_{KM} + \vec{L}^*$ , όπου

$$\vec{L}_{KM} = \vec{r}_{KM} \times M\vec{u}_{KM} = (x_{KM} \hat{i} + R \hat{j}) \times M \dot{x}_{KM} \hat{i} = RM \dot{x}_{KM} (-\hat{k})$$

και, λόγω του ότι ο άξονας περιστροφής είναι άξονας συμμετρίας του κέρματος,

$$\vec{L}^* = I^* \omega(-\hat{k}) = I^* \frac{\dot{x}_{KM}}{R} (-\hat{k}) = \frac{1}{2} MR^2 \frac{\dot{x}_{KM}}{R} (-\hat{k}) = \frac{1}{2} MR \dot{x}_{KM} (-\hat{k}).$$

Το ότι η κατεύθυνση του  $\vec{L}^*$  είναι  $-\hat{k}$  το βρίσκουμε από τον τρόπο που κυλιέται το κέρμα και τον κανόνα του δεξιού χεριού. Έτσι έχουμε

$$\vec{L} = \vec{L}_{KM} + \vec{L}^* = -\frac{3}{2} RM \dot{x}_{KM} \hat{k}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (8.10) έχουμε

$$RMg \sin \theta = \frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} RM \dot{x}_{KM} \right) = \frac{3}{2} RM \ddot{x}_{KM}$$

και

$$\ddot{x}_{KM} = \frac{2}{3} g \sin \theta .$$

Παρατήρηση 1: Το σώμα που κινείται είναι το κέρμα. Το κεκλιμένο επίπεδο είναι ακίνητο και δεν αποτελεί μέρος του συστήματος που εξετάζουμε, δηλαδή την κίνηση του κέρματος. Έτσι, το κεκλιμένο επίπεδο ασκεί δύναμη τριβής στο κέρμα και αυτή είναι εξωτερική δύναμη, όπως και το βάρος του κέρματος. Γι' αυτό τη λάβαμε υπόψη μας στον υπολογισμό του  $\vec{\tau}_{KM}$ . Αν δεν υπήρχε αυτή η εξωτερική δύναμη το κέρμα δεν θα κυλιόταν αλλά θα ολίσθαινε.

B) Χρησιμοποιώντας είτε την εξίσωση (8.29β) είτε την εξίσωση (8.29.γ) βρίσκουμε

$$F_{\tau p} = \frac{1}{3} Mg \sin \theta .$$

Συνεπώς,

$$\vec{F}_{\tau p} = -F_{\tau p} \hat{i} = -\frac{1}{3} Mg \sin \theta \hat{i} .$$

Παρατήρηση 2: Αν η άσκηση δεν ζητούσε να βρούμε τη δύναμη τριβής, θα μπορούσαμε να βρούμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας πολύ εύκολα ως εξής:

Στο σύστημα αξόνων που επιλέξαμε συνεισφορά στη ροπή ως προς την αρχή των αξόνων έχει μόνο το βάρος του κέρματος, διότι η ροπή της δύναμης τριβής είναι μηδέν. Έτσι

$$\vec{\tau} = -RMg \sin \theta \hat{k} .$$

Η στροφορμή του κέρματος ως προς την αρχή των αξόνων είναι

$$\vec{L} = \vec{L}_{KM} + \vec{L}^* = -\frac{3}{2} RM \dot{x}_{KM} \hat{k} .$$

Συνεπώς, από την εξίσωση κίνησης των στερεών σωμάτων

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

βρίσκουμε

$$\ddot{x}_{KM} = \frac{2}{3} g \sin \theta .$$

**Παράδειγμα 8.4:** Μια ομογενής ράβδος μήκους  $\ell$  και μάζας  $M$  μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές περί ένα σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Η ράβδος αφήνεται να πέσει από αρχικά οριζόντια θέση. Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου στην τυχούσα θέση.

**Λύση:** Ας θεωρήσουμε ότι η αρχικά οριζόντια ράβδος είναι στον άξονα  $x$  με το σταθερό άκρο της στη θέση  $x = 0$  και το άλλο στη θέση  $x = \ell$ . Ο άξονας  $x$  έχει φορά προς τα δεξιά. Θεωρούμε επίσης ως κατακόρυφο άξονα τον  $z$  με φορά προς τα πάνω. Συνεπώς, για να έχουμε δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων, ο άξονας  $y$

πρέπει να είναι κάθετος στο επίπεδο του χαρτιού και προς τα μέσα. Η περιστροφή της ράβδου γίνεται περί τον άξονα  $y$ .

Πρώτα θα υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου, στην αρχική θέση της, ως προς τον άξονα  $y$ . Έχουμε

$$I_y = \int dm x^2 = \int_0^\ell \lambda dx x^2 = \frac{M}{\ell} \int_0^\ell x^2 dx = \frac{1}{3} M \ell^2,$$

όπου  $\lambda = M / \ell$  είναι η γραμμική πυκνότητα της ράβδου.

Η μόνη εξωτερική δύναμη που ασκείται στη ράβδο και έχει ροπή ως προς την αρχή των αξόνων (δείτε παρακάτω!!!) είναι το βάρος της  $\vec{B} = -Mg \hat{k}$ , που ασκείται στο κέντρο μάζας της, δηλαδή στο μέσο της ράβδου. Έτσι, όταν η ράβδος σχηματίζει τυχούσα γωνία  $\theta$  με τον άξονα  $x$ , η ροπή του βάρους είναι

$$\vec{\tau} = \frac{\ell}{2} \cos \theta Mg \hat{j}.$$

Η στροφορμή της ράβδου είναι

$$\vec{L} = I_y \dot{\theta} \hat{j} = I_y \omega \hat{j} = \frac{1}{3} M \ell^2 \omega \hat{j}.$$

Η εξίσωση κίνησης της ράβδου, όπως και όλων των στερεών σωμάτων, είναι

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Με αντικατάσταση των ποσοτήτων  $\vec{\tau}$  και  $\vec{L}$  έχουμε

$$\frac{\ell}{2} \cos \theta Mg = \frac{1}{3} M \ell^2 \dot{\omega} \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{3g}{2\ell} \cos \theta.$$

Σημείωση: Η άσκηση είναι αρκετά απλή και μπορέσαμε εύκολα να γράψουμε το συνολικό  $\vec{\tau}$  και το συνολικό  $\vec{L}$  ως προς την αρχή των αξόνων. Με άλλα λόγια, δεν χρειάστηκε να σπάσουμε το  $\vec{\tau}$  και το  $\vec{L}$  σε συνιστώσες του κέντρου μάζας και γύρω από αυτό. Ας το κάνουμε όμως για πληρότητα και για να βεβαιωθούμε ότι θα βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα. Επιπλέον, θα μπορούσε η άσκηση να ζητάει την αντίδραση του άξονα στη ράβδο.

Για τον υπολογισμό του  $\vec{\tau}_{KM}$  πρέπει να θεωρήσουμε ότι στο κέντρο μάζας δρουν όλες οι εξωτερικές δυνάμεις. Πέραν του βάρους, εξωτερική δύναμη στη ράβδο είναι και η αντίδραση του άξονα περιστροφής  $\vec{F}_{avt} = F_{avt} \hat{k}$  με  $F_{avt} > 0$ . Αυτή η δύναμη δεν είχε ροπή ως προς την αρχή των αξόνων, αλλά τώρα που πρέπει να τη θεωρήσουμε ότι δρα στο κέντρο μάζας έχει ροπή ως προς την αρχή των αξόνων. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_{KM} &= r_{KM} \times (-Mg\hat{k} + F_{avr}\hat{k}) = \\ &= \frac{\ell}{2}(\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{k}) \times (-Mg\hat{k} + F_{avr}\hat{k}) = \frac{\ell}{2}\cos\theta Mg\hat{j} - \frac{\ell}{2}\cos\theta F_{avr}\hat{j}.\end{aligned}$$

Για τη ροπή ως προς το κέντρο μάζας έχουμε

$$\vec{\tau}^* = \vec{r}^* \times \vec{F}_{avr} = \frac{\ell}{2}(-\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{k}) \times \vec{F}_{avr} = \frac{\ell}{2}\cos\theta F_{avr}\hat{j}.$$

Παρατηρούμε ότι  $\vec{\tau} = \vec{\tau}_{KM} + \vec{\tau}^* = \frac{\ell}{2}\cos\theta Mg\hat{j}$ , όπως πρέπει.

Για τη στροφορμή έχουμε

$$\vec{L}_{KM} = M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \omega\hat{j} = \frac{1}{4}M\ell^2\omega\hat{j},$$

και

$$\vec{L}^* = I^*\omega\hat{j} = \frac{1}{12}M\ell^2\omega\hat{j},$$

διότι εύκολα αποδεικνύεται ότι η ροπή αδράνειας  $I^*$  της ράβδου, ως προς άξονα παράλληλο του  $y$ , που διέρχεται από το κέντρο μάζας της, είναι  $(1/12)M\ell^2$ .

Παρατηρούμε ότι  $\vec{L} = \vec{L}_{KM} + \vec{L}^* = \frac{1}{3}M\ell^2\omega\hat{j}$ , όπως πρέπει.

Ας δούμε τώρα τι δίνουν οι εξισώσεις  $\vec{\tau}_{KM} = \frac{d\vec{L}_{KM}}{dt}$  και  $\vec{\tau}^* = \frac{d\vec{L}^*}{dt}$ . Όπως εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε, και οι δυο δίνουν

$$\dot{\omega} = \frac{3g}{2\ell}\cos\theta,$$

όπως περιμέναμε. Επιπλέον, τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε είτε από την εξίσωση (8.29β) είτε από την εξίσωση (8.29γ) την αντίδραση του άξονα στη ράβδο και αυτή είναι

$$\vec{F}_{avr} = \frac{1}{4}Mg\hat{k}.$$

Συμπέρασμα 1: Η ανάλυση του  $\vec{\tau}$  και του  $\vec{L}$  σε συνεισφορές του κέντρου μάζας και γύρω από αυτό μπορεί να κάνει τη λύση πιο δύσκολη!!!

Συμπέρασμα 2: Η επιλογή του κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων μπορεί να κάνει τη λύση πολύ εύκολη. Έτσι, σε προβλήματα όπου εμφανίζονται τριβές ή αντιδράσεις συνδέσμων, επιλέγουμε το σύστημα συντεταγμένων ώστε αυτές να έχουν ροπή μηδέν ως προς την αρχή των αξόνων. Αν όμως η άσκηση ζητάει τη δύναμη τριβής ή την αντίδραση δεν θα αποφύγουμε να τις βάλουμε στις εξισώσεις μας.

**Παράδειγμα 8.5:** Θεωρήστε τροχαλία μάζας  $M$  και ακτίνας  $R$  γύρω από την οποία είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα. Στην άκρη του νήματος κρέμεται υλικό σημείο μάζας  $m$ . Το υλικό σημείο είναι αρχικά ακίνητο και αφήνεται να πέσει λόγω του βάρους του. Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.

**Λύση:** Ας θεωρήσουμε τον άξονα της τροχαλίας ως τον άξονα  $y$ , με κατεύθυνση προς τα μέσα. Το κέντρο της τροχαλίας είναι στην αρχή των αξόνων, με τον άξονα  $x$  οριζόντιο (κατεύθυνση προς τα δεξιά) και τον άξονα  $z$  κατακόρυφο με κατεύθυνση προς τα πάνω.

Το σύστημά μας αποτελείται από την τροχαλία και τη μάζα  $m$ . Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα  $y$  είναι

$$I_y = \int dm r^2 = \int_0^R \sigma 2\pi r dr r^2 = \sigma 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2.$$

Ροπή, ως προς την αρχή των αξόνων, ασκεί μόνο το βάρος της μάζας  $m$ . Συνεπώς,

$$\vec{\tau} = R m g \hat{j}.$$

Στη στροφορμή συνεισφέρουν και η τροχαλία και η μάζα  $m$ . Συνεπώς έχουμε

$$\vec{L} = I_y \omega \hat{j} + R m u \hat{j} = \frac{1}{2} MR^2 \omega \hat{j} + R m \omega R \hat{j} = \left( \frac{1}{2} M + m \right) R^2 \omega \hat{j}.$$

Η εξίσωση κίνησης της τροχαλίας και της μάζας  $m$ , όπως και όλων των στερεών σωμάτων, είναι

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Με αντικατάσταση των ποσοτήτων  $\vec{\tau}$  και  $\vec{L}$  έχουμε

$$R m g = \frac{M + 2m}{2} R^2 \dot{\omega} \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{2mg}{(M + 2m)R}.$$

Παρατήρηση: Στη άσκηση αυτή σίγουρα δεν μας εξυπηρετεί να σπάσουμε το  $\vec{\tau}$  και το  $\vec{L}$  σε συνεισφορές του κέντρου μάζας και γύρω από αυτό.

## 8.4 Περιστροφή περί σταθερό άξονα που δεν είναι άξονας συμμετρίας

Ίσως έχετε σχηματίσει την εντύπωση ότι όταν ένα στερεό σώμα περιστρέφεται περί τον σταθερό άξονα  $z$  η στροφορμή  $\vec{L}$  του σώματος έχει μόνο  $z$ -συνιστώσα. Αυτό είναι λάθος, εκτός ειδικών περιπτώσεων. Ας δούμε γιατί. Από τον ορισμό της στροφορμής στερεού σώματος ως προς την αρχή των αξόνων έχομε

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ \dot{x}_i & \dot{y}_i & \dot{z}_i \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^N m_i [(y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) \hat{i} + (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) \hat{j} + (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) \hat{k}].\end{aligned}\quad (8.30)$$

Αλλά, όλες οι μάζες  $m_i$  περιγράφουν κύκλους με ακτίνες  $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ . Έτσι έχομε

$$\begin{aligned}x_i = r_i \cos \phi_i &\quad \Rightarrow \quad \dot{x}_i = -r_i \sin \phi_i \omega = -\omega y_i \\ y_i = r_i \sin \phi_i &\quad \Rightarrow \quad \dot{y}_i = r_i \cos \phi_i \omega = \omega x_i \\ z_i = \text{σταθερο}' &\quad \Rightarrow \quad \dot{z}_i = 0\end{aligned}\quad (8.31)$$

όπου  $\omega = \frac{d\phi_i}{dt}$  είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σώματος, που είναι η ίδια για όλες τις μάζες  $m_i$ . Έτσι, οι τρεις συνιστώσες της (8.30) γίνονται

$$\begin{aligned}L_x &= \sum_{i=1}^N m_i (-z_i \dot{y}_i) = -\sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \omega = \left( -\sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \right) \omega \equiv I_{xz} \omega \\ L_y &= \sum_{i=1}^N m_i (z_i \dot{x}_i) = -\sum_{i=1}^N m_i z_i y_i \omega = \left( -\sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \right) \omega \equiv I_{yz} \omega \\ L_z &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \omega \equiv I_z \omega\end{aligned}\quad (8.32)$$

όπου ορίσαμε τα γινόμενα αδράνειας ως προς την αρχή των αξόνων ως

$$I_{xz} \equiv -\sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \quad (8.33)$$

και

$$I_{yz} \equiv -\sum_{i=1}^N m_i y_i z_i. \quad (8.34)$$

Γενικά, για ένα τυχόν στερεό σώμα, τα γινόμενα αδράνειας είναι διάφορα του μηδενός. Έτσι, παρά το γεγονός ότι η περιστροφή του στερεού σώματος γίνεται περί τον σταθερό άξονα  $z$ , η στροφορμή του στερεού σώματος μπορεί να έχει και  $x$ - και  $y$ -συνιστώσες!!! Σύμφωνα με τα παραπάνω, η στροφορμή στερεού σώματος περί τον σταθερό άξονα  $z$  γράφεται ως



$$\vec{L} = L_x \hat{i} + L_y \hat{j} + L_z \hat{k} = I_{xz} \omega \hat{i} + I_{yz} \omega \hat{j} + I_z \omega \hat{k}. \quad (8.35)$$

Αν για ένα σύστημα αξόνων  $x, y, z$ , τα γινόμενα αδράνειας  $I_{xz}$  και  $I_{yz}$  είναι μηδέν, τότε ο άξονας  $z$  λέγεται *κύριος άξονας αδράνειας* και  $\vec{L} = L_z \hat{k}$ . Ένας άξονας συμμετρίας είναι πάντοτε κύριος άξονας αδράνειας, το αντίθετο όμως δεν ισχύει πάντοτε. Ακόμη και σε στερεά σώματα με ακανόνιστο σχήμα μπορούμε να ορίσουμε πάντοτε τρεις κύριους άξονες αδράνειας. Δεν θα το αποδείξουμε όμως αυτό εδώ. Απλώς αναφέρουμε ότι η εύρεση των τριών κύριων αξόνων αδράνειας ισοδυναμεί με τη διαγωνοποίηση του πίνακα αδράνειας  $\vec{I}$  (βλ. εξίσωση 8.36).

Παρατήρηση: Μετά από τα παραπάνω, πρέπει να σας έχει δημιουργηθεί η απορία γιατί στο Παράδειγμα 8.4, όπου είχαμε περιστροφή περί σταθερό άξονα, γράψαμε

$$\vec{L} = I_y \dot{\theta} \hat{j} = I_y \omega \hat{j} = \frac{1}{3} M \ell^2 \omega \hat{j}$$

και όχι

$$L_y = I_y \dot{\theta} = I_y \omega = \frac{1}{3} M \ell^2 \omega.$$

Ο λόγος είναι ότι τα γινόμενα αδράνειας  $I_{xy}$  και  $I_{zy}$  είναι μηδέν, διότι όλα τα σημεία της ράβδου έχουν  $y = 0$ . Η ράβδος βρίσκεται πάντοτε στο επίπεδο  $xz$ . Έτσι, η ολική στροφορμή είναι  $\vec{L} = L_y \hat{j}$ .

**Άσκηση 8.3:** Δείξτε ότι αν ο άξονας  $z$  είναι άξονας συμμετρίας ενός στερεού σώματος, τότε τα γινόμενα αδράνειας  $I_{xz}$  και  $I_{yz}$  είναι μηδέν.

**Παράδειγμα 8.6:** Μια αβαρής ράβδος μήκους  $2\ell$  φέρει στο κάθε άκρο της μια σημειακή μάζα  $m$  και σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον κατακόρυφο άξονα  $z$ . Το μέσο της ράβδου είναι στην αρχή των αξόνων και η ράβδος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$  περί τον άξονα  $z$ . Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  η ράβδος βρίσκεται στο επίπεδο  $xz$ , με τον άξονα  $x$  οριζόντιο.

A) Να βρεθεί η συνιστώσα  $L_z$  της στροφορμής του συστήματος ως προς την αρχή των αξόνων.

B) Να βρεθεί το διάνυσμα  $\vec{L}$  της στροφορμής του συστήματος ως προς την αρχή των αξόνων όταν η ράβδος είναι στο επίπεδο  $xz$ , δηλαδή για  $t = 0$ ,  $t = 2\pi / \omega$ , κλπ.

Γ) Είναι λογικό να μην είναι το διάνυσμα  $\vec{L}$  της στροφορμής του συστήματος παράλληλο προς τον άξονα περιστροφής  $z$ ; Για ποια γωνία  $\theta$  το  $\vec{L}$  είναι παράλληλο προς τον άξονα περιστροφής  $z$ ;

Δ) Εξηγήστε γιατί είναι σημαντικό να γίνεται ζυγοστάθμιση στους τροχούς των αυτοκινήτων.

**Λύση:** A) Εδώ έχουμε περιστροφή στερεού σώματος περί σταθερό άξονα. Άρα, σύμφωνα με την εξίσωση (7.19) έχουμε ότι

$$L_z = I_z \omega = 2m(\ell \sin \theta)^2 \omega,$$

διότι η ροπή αδράνειας της κάθε μάζας είναι  $m(\ell \sin \theta)^2$ .

Β) Τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , η μια μάζα έχει διανυσματική ακτίνα

$\vec{r} = \ell \sin \theta \hat{i} + \ell \cos \theta \hat{k}$  και η άλλη  $-\vec{r}$ . Η ταχύτητα της πρώτης είναι  $\vec{u} = \omega \ell \sin \theta \hat{j}$  και της άλλης  $-\vec{u}$ . Έτσι, η στροφορμή του συστήματος των δυο σημειακών μαζών είναι

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times m\vec{u} + (-\vec{r}) \times (-m\vec{u}) = 2\vec{r} \times m\vec{u} \\ &= 2m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \ell \sin \theta & 0 & \ell \cos \theta \\ 0 & \omega \ell \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = -2m\omega \ell^2 (\sin \theta \cos \theta \hat{i} - \sin^2 \theta \hat{k}).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η στροφορμή  $\vec{L}$  έχει όχι μόνο  $z$ -συνιστώσα, αλλά και  $x$ . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το γινόμενο αδράνειας  $I_{xz}$  (εξισώσεις 8.32, 8.33) είναι διάφορο του μηδενός. Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι, καθώς περιστρέφεται η ράβδος, το  $\vec{L}$  θα έχει και  $y$ -συνιστώσα. Έτσι, μετά από  $1/4$  της περιόδου περιστροφής, η στροφορμή της ράβδου θα είναι  $\vec{L} = -2m\omega \ell^2 (\sin \theta \cos \theta \hat{j} - \sin^2 \theta \hat{k})$ .

Γ) Είναι λογικό το  $\vec{L}$  να μην έχει μόνο  $z$ -συνιστώσα, διότι ο άξονας  $z$  δεν είναι άξονας συμμετρίας (ή καλύτερα κύριος άξονας αδράνειας). Για  $\theta = \pi/2$ , ο άξονας  $z$  γίνεται άξονας συμμετρίας και το  $\vec{L}$  γίνεται παράλληλο με το  $\vec{\omega}$ .

Δ) Αν ο τροχός ενός αυτοκινήτου δεν είναι ζυγοσταθμισμένος, τότε ο άξονας του τροχού δεν είναι άξονας συμμετρίας, με αποτέλεσμα η στροφορμή του τροχού να μην είναι παράλληλη με τον άξονα. Αυτό συνεπάγεται μη ομαλή κύλιση του τροχού και φθορά στα ρουλεμάν.

Παρατήρηση: Αν θέλαμε να λύσουμε την άσκηση όχι για  $t = 0$ , αλλά για την τυχούσα χρονική στιγμή  $t$  θα γράφαμε για τη διανυσματική ακτίνα της μάζας  $m$  που είναι πάνω από το επίπεδο  $xy$

$$\vec{r} = l \sin \theta \cos \phi \hat{i} + l \sin \theta \sin \phi \hat{j} + l \cos \theta \hat{k},$$

όπου

$$\phi(t) = \omega t.$$

Της άλλης μάζας  $m$  η διανυσματική ακτίνα είναι  $-\vec{r}$ .

Η γραμμική ταχύτητα της  $m$ , που είναι πάνω από το επίπεδο  $xy$ , είναι

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega l \sin \theta \sin \phi \hat{i} + \omega l \sin \theta \cos \phi \hat{j},$$

ενώ της άλλης είναι  $-\vec{u}$ .

Έτσι η ολική στροφορμή  $\vec{L}_{2m}$  των δυο μαζών είναι

$$\begin{aligned}
\vec{L}_{2m} &= \vec{r} \times m\vec{u} + (-\vec{r}) \times m(-\vec{u}) = 2\vec{r} \times m\vec{u} \\
&= 2m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ l \sin \theta \cos \phi & l \sin \theta \sin \phi & l \cos \theta \\ -\omega l \sin \theta \sin \phi & \omega l \sin \theta \cos \phi & 0 \end{vmatrix} \\
&= -2m\omega l^2 (\sin \theta \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin^2 \theta \hat{k}) \\
&= -2m\omega l^2 (\sin \theta \cos \theta \cos \omega t \hat{i} + \sin \theta \cos \theta \sin \omega t \hat{j} - \sin^2 \theta \hat{k}).
\end{aligned}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα, για τυχούσα γωνία  $\theta$  και τυχούσα χρονική στιγμή  $t$ , μας δημιουργεί την ακόλουθη ερώτηση:

**Ερώτηση:** Αφού έχουμε χρονικά εξαρτώμενη στροφορμή, από την εξίσωση κίνησης των στερεών σωμάτων

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

συνεπάγεται ότι υπάρχει χρονικά εξαρτώμενη ροπή. Όμως, βαρύτητα και τριβές δεν υπάρχουν. Άρα ποια δύναμη έχει αυτή τη ροπή ως προς την αρχή των αξόνων;

**Άσκηση 8.4:** Να βρεθεί η στροφορμή  $\vec{L}$  της ράβδου του Παραδείγματος 8.6 χρησιμοποιώντας την έκφραση (8.35).

**Άσκηση 8.5:** Μια ομογενής ράβδος μήκους  $2\ell$  έχει μάζα  $2m$  και σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον κατακόρυφο άξονα  $z$ . Το μέσο της ράβδου είναι στην αρχή των αξόνων και η ράβδος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$  περί τον άξονα  $z$ . Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  η ράβδος βρίσκεται στο επίπεδο  $xz$ , με τον άξονα  $x$  οριζόντιο.  
Α) Να βρεθεί η συνιστώσα  $L_z$  της στροφορμής της ράβδου ως προς την αρχή των αξόνων.

Β) Να βρεθεί το διάνυσμα  $\vec{L}$  της στροφορμής της ράβδου ως προς την αρχή των αξόνων όταν η ράβδος είναι στο επίπεδο  $xz$ , δηλαδή για  $t = 0$ ,  $t = 2\pi / \omega$ , κλπ.

## 8.5 Περιστροφή στερεού σώματος περί τυχόντα άξονα

Στο υποκεφάλαιο 8.2 είδαμε ότι η εξίσωση (8.10) είναι η εξίσωση κίνησης όλων των στερεών σωμάτων. Για να γράψουμε αυτή την εξίσωση, πρέπει να είμαστε σε θέση να γράψουμε τη στροφορμή  $\vec{L}$  του στερεού σώματος ως προς οποιοδήποτε σημείο.

Ας θεωρήσουμε ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων  $x, y, z$  με την αρχή του στο τυχόν σημείο  $O$ . Έστω  $\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$  η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του στερεού σώματος στο σύστημα  $x, y, z$ . Παρότι η απόδειξη δεν είναι δύσκολη, εμείς εδώ μόνο θα γράψουμε τις εκφράσεις για τη στροφορμή  $\vec{L}$  του στερεού σώματος ως προς το σημείο  $O$  και την κινητική ενέργεια  $T$  του στερεού σώματος.

Έτσι γράφουμε

$$\vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad (8.36)$$

ή

$$\begin{aligned} L_x &= I_x \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z, \\ L_y &= I_{yx} \omega_x + I_y \omega_y + I_{yz} \omega_z, \\ L_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_z \omega_z, \end{aligned} \quad (8.37)$$

όπου

$$I_x = \int dm (y^2 + z^2), \quad I_y = \int dm (x^2 + z^2), \quad I_z = \int dm (x^2 + y^2),$$

είναι οι ροπές αδράνειας του σώματος ως προς τους άξονες  $x, y, z$  αντιστοίχως,

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int dm xy, \quad I_{xz} = I_{zx} = -\int dm xz, \quad I_{yz} = I_{zy} = -\int dm yz$$

είναι τα γινόμενα αδράνειας και  $\vec{I}$  είναι ο πίνακας αδράνειας ως προς το σύστημα  $x, y, z$ .

Η κινητική ενέργεια  $T$  του στερεού σώματος γράφεται ως

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} (\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z) \cdot \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (8.38)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left( I_x \omega_x + I_{yx} \omega_y + I_{zx} \omega_z \quad I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y + I_{zy} \omega_z \quad I_{xz} \omega_x + I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z \right) \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left( I_x \omega_x^2 + I_{yx} \omega_y \omega_x + I_{zx} \omega_z \omega_x + I_{xy} \omega_x \omega_y + I_y \omega_y^2 + I_{zy} \omega_z \omega_y + I_{xz} \omega_x \omega_z + I_{yz} \omega_y \omega_z + I_z \omega_z^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 \right) + I_{xy} \omega_x \omega_y + I_{xz} \omega_x \omega_z + I_{yz} \omega_y \omega_z. \end{aligned}$$

Στο υποκεφάλαιο 8.3 και ειδικά στις εξισώσεις (8.17) και (8.21) είδαμε ότι πρέπει να είμαστε σε θέση να γράφουμε τη στροφορμή  $\vec{L}^*$  και την κινητική ενέργεια  $T^*$  στερεού σώματος για οποιαδήποτε γωνιακή ταχύτητα  $\vec{\omega}$ , δηλαδή για οποιονδήποτε άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος.

Ας θεωρήσουμε σύστημα συντεταγμένων  $x^*, y^*, z^*$  με την αρχή τους στο κέντρο μάζας του στερεού σώματος. Το σύστημα έχει σταθερό προσανατολισμό ως προς ένα αδρανειακό σύστημα  $x, y, z$ , ενώ το κέντρο μάζας μπορεί να κινείται. Έστω

$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$  η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του στερεού σώματος στο σύστημα  $x^*, y^*, z^*$  ή  $x, y, z$ , περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας. Σύμφωνα με το γενικό αποτέλεσμα (8.36), γράφουμε

$$\vec{L}^* = \vec{I}^* \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_x^* & I_{xy}^* & I_{xz}^* \\ I_{yx}^* & I_y^* & I_{yz}^* \\ I_{zx}^* & I_{zy}^* & I_z^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad (8.39)$$

ή

$$\begin{aligned} L_x^* &= I_x^* \omega_x + I_{xy}^* \omega_y + I_{xz}^* \omega_z, \\ L_y^* &= I_{xy}^* \omega_x + I_y^* \omega_y + I_{yz}^* \omega_z, \\ L_z^* &= I_{zx}^* \omega_x + I_{zy}^* \omega_y + I_z^* \omega_z, \end{aligned} \quad (8.40)$$

όπου

$$I_x^* = \int dm (y^{*2} + z^{*2}), \quad I_y^* = \int dm (x^{*2} + z^{*2}), \quad I_z^* = \int dm (x^{*2} + y^{*2}),$$

είναι οι ροπές αδράνειας του σώματος ως προς τους άξονες  $x^*, y^*, z^*$  αντιστοίχως,

$$I_{xy}^* = I_{yx}^* = -\int dm x^* y^*, \quad I_{xz}^* = I_{zx}^* = -\int dm x^* z^*, \quad I_{yz}^* = I_{zy}^* = -\int dm y^* z^*$$

είναι τα γινόμενα αδράνειας και  $\vec{I}^*$  είναι ο πίνακας αδράνειας ως προς το σύστημα  $x^*, y^*, z^*$ .

Η κινητική ενέργεια  $T^*$  του στερεού σώματος λόγω περιστροφής του περί το κέντρο μάζας του γράφεται ως

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I}^* \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z) \cdot \begin{pmatrix} I_x^* & I_{xy}^* & I_{xz}^* \\ I_{yx}^* & I_y^* & I_{yz}^* \\ I_{zx}^* & I_{zy}^* & I_z^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (I_x^* \omega_x^2 + I_y^* \omega_y^2 + I_z^* \omega_z^2) + I_{xy}^* \omega_x \omega_y + I_{xz}^* \omega_x \omega_z + I_{yz}^* \omega_y \omega_z. \end{aligned} \quad (8.41)$$

**Άσκηση 8.6:** Να βρεθεί η στροφορμή  $\vec{L}$  του συστήματος τού Παραδείγματος 8.6 χρησιμοποιώντας την έκφραση (8.39) ή τις εκφράσεις (8.40).