ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ροπή και Στροφορμή – Μέρος πρώτο

Μέχρι εδώ εξετάσαμε την κίνηση ενός υλικού σημείου υπό την επίδραση μιας δύναμης. Τα πράγματα αλλάζουν δραματικά αν αντί υλικού σημείου έχομε ένα στερεό σώμα. Η μελέτη της κίνηση ενός στερεού σώματος δεν είναι εύκολη υπόθεση και σίγουρα υπερβαίνει κατά πολύ το επίπεδο του παρόντος μαθήματος. Για να εισαγάγομε με φυσικό τρόπο τις έννοιες της *ροπής δύναμης* και *στροφορμής* θα περιοριστούμε στην περιστροφή στερεού σώματος περί σταθερό άξονα.

7.1 Ροπή δύναμης

Ας θεωρήσομε ένα στερεό σώμα που μπορεί να περιστρέφεται περί τον σταθερό άξονα z, ο οποίος, ας δεχτούμε χωρίς να είναι απαραίτητο, διέρχεται από το σώμα. Επιλέγομε το επίπεδο xy να τέμνει το στερεό σώμα και θεωρούμε ένα σημείο P του σώματος που να βρίσκεται στο επίπεδο xy. Έστω ότι οι συντεταγμένες του σημείου P είναι $(x, y, 0)$. Επομένως η διανυσματική ακτίνα του σημείου P είναι

$$\vec{r} = r\,\hat{r}, \tag{7.1}$$

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ και $\hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$ είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα. Εδώ θεωρήσαμε ότι η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα με τον άξονα x είναι θ, δηλαδή $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$.

Ας θεωρήσομε τώρα ότι το σώμα περιστρέφεται κατά απειροστή γωνία $d\theta$. Ας δούμε πόση είναι η μεταβολή $d\vec{r}$ της διανυσματικής ακτίνας $\vec{r}$. Κατά την περιστροφή το μέτρο του διανύσματος $\vec{r}$, δηλαδή το r, παραμένει σταθερό. Άρα, με παραγώγιση της (7.1) έχομε

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = 0 + r\frac{d}{dt}(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}) = r(-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})\frac{d\theta}{dt}. \tag{7.2}$$

Αλλά, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 2.5, το διάνυσμα στην παρένθεση είναι το μοναδιαίο (εφαπτόμενο στον κύκλο) διάνυσμα $\hat{\theta}$,

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}. \tag{7.3}$$

Έτσι, πολλαπλασιάζοντας με το dt αμφότερα τα μέλη της (7.2) παίρνομε

$$d\vec{r} = r\,d\theta\,\hat{\theta}. \tag{7.4}$$

Το αποτέλεσμα (7.4) θα μπορούσαμε να το γράψομε κατ' ευθείαν, χωρίς να κάνομε πράξεις, διότι το μέτρο της μεταβολής $d\vec{r}$ είναι $r\,d\theta$, δηλαδή είναι το μήκος τόξου που διέγραψε το σημείο P μετά από περιστροφή κατά γωνία $d\theta$. Επίσης, η κατεύθυνση της κίνησης του σημείου P είναι αυτή του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\theta}$. Άρα η (7.4) είναι προφανής.

Ας θεωρήσομε τώρα ότι στο σημείο P ασκείται δύναμη $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$ και ότι λόγω αυτής της δύναμης το στερεό σώμα περιστρέφεται περί τον άξονα z κατά γωνία $d\theta$. Το έργο λοιπόν που έκανε η δύναμη είναι

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = (F_x\hat{i} + F_y\hat{j})\cdot r\,d\theta\,\hat{\theta} = (F_x\hat{i} + F_y\hat{j})\cdot r\,d\theta(-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})$$

$$= -F_x\, r\sin\theta\, d\theta + F_y r\cos\theta\, d\theta = -F_x\, y\, d\theta + F_y x\, d\theta$$

$$= (x F_y - y F_x)d\theta\,, \tag{7.5}$$

που έχει κάπως περίεργη μορφή. Στη μονοδιάστατη κίνηση, ας πούμε στον άξονα x, το έργο της δύναμης F_x για μετατόπιση κατά dx είναι $dW = F_x\,dx$, από την οποία θα μπορούσε κα γράψει κανείς $F_x = dW/dx$. Αν κάνομε κάτι παρόμοιο στην εξίσωση (7.5) έχομε

$$x F_y - y F_x = dW/d\theta\,. \tag{7.6}$$

Βλέπομε λοιπόν ότι, για το ίδιο έργο dW, στην περιστροφή εμφανίζεται η ποσότητα $x F_y - y F_x$ που θα τη λέμε *ροπή της δύναμης* $\vec{F}$ *ως προς την αρχή των αξόνων.* Όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, η ροπή της δύναμης $\vec{F}$ ορίζεται ως διανυσματικό μέγεθος και η ποσότητα που εμφανίζεται στην εξίσωση (7.6) είναι η z-συνιστώσα της ροπής. Γι' αυτό εμφανίζεται ως βαθμωτό μέγεθος.

Ορισμός: Αν $\vec{r}$ είναι η διανυσματική ακτίνα ενός σημείου στο οποίο δρα η δύναμη $\vec{F}$, τότε η *ροπή της δύναμης* $\vec{F}$ *ως προς την αρχή των αξόνων* ορίζεται ως

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}\,, \tag{7.7}$$

όπου το $\times$ συμβολίζει το λεγόμενο *εξωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων* (βλ. Κεφάλαιο 6).

Στην ειδική περίπτωση που εξετάσαμε παραπάνω, δηλαδή την περιστροφή στερεού σώματος περί τον <u>σταθερό</u> άξονα z, όπου τα διανύσματα $\vec{r}$ και $\vec{F}$ είχαν μόνο x και y συνιστώσες, γράφομε

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = (x\hat{i} + y\hat{j})\times(F_x\hat{i} + F_y\hat{j}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (xF_y - yF_x)\hat{k}\,. \tag{7.8}$$

Το εξωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων είναι μια ορίζουσα με πρώτη γραμμή τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{i},\ \hat{j},\ \hat{k}$, με δεύτερη γραμμή τις συνιστώσες του πρώτου διανύσματος και με τρίτη γραμμή τις συνιστώσες του δεύτερου διανύσματος. Το ανάπτυγμα της ορίζουσας αυτής γίνεται πάντοτε κατά μήκος της πρώτης γραμμής. Αυτό σημαίνει ότι το εξωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων είναι διάνυσμα. Είναι προφανές από τα παραπάνω ότι η υπο-ορίζουσα του $\hat{i}$ είναι μηδέν και ομοίως για την υπο-ορίζουσα του $\hat{j}$. Μόνο η υπο-ορίζουσα του $\hat{k}$ είναι διάφορη του μηδενός και ίση με την ποσότητα (7.6), δηλαδή $\tau_z = x F_y - y F_x$.

7.2 Στροφορμή υλικού σημείου

Θα δούμε τώρα πως εμφανίζεται με φυσικό τρόπο η *στροφορμή*.

Ας ξεχάσομε προς το παρόν το στερεό σώμα που εξετάσαμε παραπάνω και ας θεωρήσομε ότι στο σημείο P υπάρχει ένα υλικό σημείο μάζας m, πάνω στο οποίο ασκείται δύναμη $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$. Ως αποτέλεσμα αυτής της δύναμης, το υλικό σημείο θα κάνει κίνηση στο επίπεδο xy, που περιγράφεται από τις δυο πρώτες εξισώσεις (2.6). Ας το δούμε όμως αυτό και από άλλη σκοπιά.

Όπως είδαμε παραπάνω, η z-συνιστώσα της ροπής της δύναμης $\vec{F}$ είναι

$$\tau_z = x F_y - y F_x . \qquad (7.9)$$

Από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα για το υλικό σημείο μάζας m έχομε ότι

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{και} \quad F_y = m\frac{d^2y}{dt^2} . \qquad (7.10)$$

Αντικαθιστώντας στην (7.9) έχομε

$$\tau_z = x m\frac{d^2y}{dt^2} - ym\frac{d^2x}{dt^2} . \qquad (7.11)$$

Αλλά,

$$\frac{d}{dt}\left(xm\frac{dy}{dt} - ym\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx}{dt}m\frac{dy}{dt} + xm\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}m\frac{dx}{dt} - ym\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$= xm\frac{d^2y}{dt^2} - ym\frac{d^2x}{dt^2} . \qquad (7.12)$$

Έτσι, η (7.11) γράφεται

$$\tau_z = \frac{d}{dt}\left(xm\frac{dy}{dt} - ym\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(xmu_y - ymu_x\right) = \frac{d}{dt}\left(xp_y - yp_x\right), \qquad (7.13)$$

όπου u_x και u_y είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας του υλικού σημείου και p_x, p_y είναι οι αντίστοιχες συνιστώσες της ορμής. Η ποσότητα $\left(xp_y - yp_x\right)$, που εμφανίζεται στην (7.13) μας θυμίζει τη z-συνιστώσα εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων.

Ορισμός: Αν $\vec{r}$ είναι η διανυσματική ακτίνα ενός υλικού σημείου μάζας m στο οποίο δρα η δύναμη $\vec{F}$, τότε η *στροφορμή του υλικού σημείου ως προς την αρχή των αξόνων* ορίζεται ως

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}\,, \tag{7.14}$$

όπου το $\times$ συμβολίζει το λεγόμενο *εξωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων* (βλ. Κεφάλαιο 6).

Στην ειδική περίπτωση που εξετάσαμε εδώ, δηλαδή την κίνηση υλικού σημείου στο επίπεδο xy, γράφομε

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = (x\hat{i} + y\hat{j}) \times (p_x\hat{i} + p_y\hat{j}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix} = (xp_y - yp_x)\hat{k} \tag{7.15}$$

και η στροφορμή $\vec{\ell}$ έχει μόνο z-συνιστώσα. Έτσι, η εξίσωση (7.13) γράφεται ως

$$\tau_z = \frac{d\ell_z}{dt}\,, \tag{7.16}$$

όπου $\ell_z = xp_y - yp_x$ είναι η z-συνιστώσα της στροφορμής του υλικού σημείου. Η εξίσωση (7.16) <u>δεν είναι τίποτε άλλο παρά ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα</u> γραμμένος με τη χρήση της ροπής δύναμης και της στροφορμής.

<u>Παρατήρηση</u>: Στην ειδική περίπτωση που το υλικό σημείο κάνει κύκλο ακτίνας r, η διανυσματική ακτίνα του $\vec{r}$ και η ορμή του $\vec{p}$ είναι κάθετα διανύσματα και η στροφορμή του υλικού σημείου μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = r\,\hat{r} \times p\hat{\theta} = rp\hat{k}\,, \tag{7.17}$$

διότι $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{k}$, κατ' αναλογία προς τις σχέσεις (6.5).

7.3 Στροφορμή στερεού σώματος

Τώρα που ξέρομε τι είναι η στροφορμή υλικού σημείου, μπορούμε νε εξετάσομε τη στροφορμή στερεού σώματος, <u>αφού τα στερεά σώματα αποτελούνται από άτομα, που μπορούμε να τα θεωρήσομε σαν υλικά σημεία.</u>

Ας θεωρήσομε ξανά ένα στερεό σώμα, που μπορεί να περιστρέφεται περί τον <u>σταθερό</u> άξονα z. Έστω ότι το στερεό σώμα αποτελείται από N άτομα. Το τυχόν άτομο i έχει μάζα m_i και απόσταση r_i από τον άξονα z. Αν το στερεό σώμα είναι κράμα πολλών στοιχείων, οι μάζες m_i δεν είναι όλες ίδιες. Όλες οι μάζες εκτελούν κύκλους κατά την περιστροφή του στερεού σώματος.

Για το τυχόν άτομο i γράφομε για τη στροφορμή του, σύμφωνα με την (7.17),

$$\ell_{zi} = r_i\, p_i = r_i m_i u_i = r_i m_i \omega r_i = \omega m_i r_i^2 , \tag{7.18}$$

όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του στερεού σώματος περί τον <u>σταθερό</u> άξονα z. Έτσι, η ολική στροφορμή του στερεού σώματος είναι

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} \ell_{zi} = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \equiv \omega I_z , \tag{7.19}$$

όπου ορίσαμε το $I_z \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$ ως τη *ροπή αδράνειας* του στερεού σώματος ως προς τον άξονα z.

<u>Παρατήρηση</u>: Είναι σημαντικό να παρατηρήσομε ότι η εξίσωση (7.19) ισχύει και για υλικό σημείο μάζας m που κάνει κύκλο ακτίνας r στο επίπεδο xy με κέντρο την αρχή των αξόνων, διότι $I_z \equiv mr^2$ και $L_z = \omega I_z = \omega m r^2 = r m \omega r = r m u = r\, p$, όπου $u = \omega r$ είναι η ταχύτητα του υλικού σημείου.

Από τον ορισμό της ροπής αδράνειας στερεού σώματος ως προς τον άξονα z, που είναι το άθροισμα των γινομένων των μαζών του επί το τετράγωνο των αποστάσεών τους από τον άξονα z, μπορούμε να γενικεύσομε τον ορισμό για συνεχείς κατανομές μάζας. Έτσι, όπως στο Κεφάλαιο 4, θεωρούμε στερεό σώμα μάζας M με πυκνότητα ρ και θεωρούμε επίσης έναν απειροστό όγκο του σώματος dV που απέχει από τον άξονα z απόσταση r. Σ' αυτόν τον όγκο υπάρχει η απειροστή μάζα $dm = \rho\, dV$. Κατ' αναλογία λοιπόν προς τη ροπή αδράνειας για διακριτά υλικά σημεία γράφομε

$$I_z \equiv \int_{(V)} dm\, r^2 = \int_{(V)} r^2 \rho\, dV , \tag{7.20}$$

όπου το σύμβολο (V) στο ολοκλήρωμα σημαίνει ότι πρέπει να ολοκληρώσομε ως προς όλον τον όγκο V του στερεού σώματος. Αν το στερεό σώμα έχει αμελητέο πάχος, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται ως προς την επιφάνεια του σώματος. Αν το στερεό σώμα είναι λεπτό σύρμα, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται ως προς την γραμμή που διατρέχει το σώμα.

Στο επόμενο Κεφάλαιο θα δείξομε ότι η εξίσωση

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} \tag{7.21}$$

περιγράφει την περιστροφή στερεού σώματος περί τον άξονα z. Εδώ L_z είναι η z συνιστώσα της στροφορμής του στερεού σώματος περί τον άξονα z και τ_z είναι η z συνιστώσα της συνολικής ροπής που ασκείται στο στερεό σώμα.

7.4 Κινητική ενέργεια στερεού σώματος

Ας θεωρήσομε ξανά ένα στερεό σώμα, που μπορεί να περιστρέφεται περί τον σταθερό άξονα z. Έστω ότι το στερεό σώμα αποτελείται από N άτομα. Το τυχόν άτομο i έχει μάζα m_i και απόσταση r_i από τον άξονα z. Αν το στερεό σώμα είναι κράμα πολλών στοιχείων, οι μάζες m_i δεν είναι όλες ίδιες. Όλες οι μάζες εκτελούν κύκλους κατά την περιστροφή του στερεού σώματος.

Για το τυχόν άτομο i γράφομε για την κινητική ενέργειά του

$$\frac{1}{2}m_i u_i^2 = \frac{1}{2}m_i\omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2\ \omega^2, \tag{7.22}$$

όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του στερεού σώματος περί τον σταθερό άξονα z. Έτσι, η ολική κινητική ενέργεια του στερεού σώματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \equiv \frac{1}{2}I_z\omega^2, \tag{7.23}$$

όπου ορίσαμε το $I_z \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$ ως τη *ροπή αδράνειας* του στερεού σώματος ως προς τον άξονα z.

Παρατήρηση: Όπως η εξίσωση (7.19) έτσι και η εξίσωση (7.23) ισχύει για υλικό σημείο μάζας m που κάνει κύκλο ακτίνας r στο επίπεδο xy με κέντρο την αρχή των αξόνων. Έχομε ότι

$$T = \frac{1}{2}I_z\omega^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}mu^2.$$

Παράδειγμα 7.1: Δίνεται συρμάτινο πλαίσιο, σχήματος ρόμβου, στο επίπεδο xz, γραμμικής πυκνότητας λ (οι μονάδες είναι kg/m), με κορυφές στα σημεία $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$. Το πλαίσιο μετά περιστρέφεται περί τον σταθερό άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η συνιστώσα L_z της στροφορμής του πλαισίου.

Λύση: Πρώτα πρέπει να βρούμε τη ροπή αδράνειας του πλαισίου. Ας θεωρήσομε την πλευρά μεταξύ των κορυφών $(0,1)$ και $(1,0)$. Αν βρούμε τη ροπή αδράνειας αυτής της πλευράς, την πολλαπλασιάζομε με το 4 για να βρούμε την ολική ροπή αδράνειας. Η εξίσωση της ευθείας που ενώνει τις κορυφές $(0,1)$ και $(1,0)$ είναι $z = 1 - x$.

Στον θετικό ημιάξονα x και στα σημεία x και $x+dx$ (όπου $0<x<1$) φέρομε ευθείες παράλληλες προς τον άξονα z. Αυτές «κόβουν» από το σύρμα που έχει εξίσωση $z=1-x$ ένα κομμάτι μήκους $ds=\sqrt{dx^2+dz^2}=dx\sqrt{1+(dz/dx)^2}=dx\sqrt{1+(-1)^2}=dx\sqrt{2}$. Το κομμάτι αυτό του σύρματος έχει μάζα $dm=\lambda ds=\lambda dx\sqrt{2}$ και απέχει από το άξονα z κατά x, διότι εμείς το επιλέξαμε έτσι. Άρα, η ροπή αδράνειας του κομματιού ως προς τον άξονα z είναι $dI_z=dm\,x^2$ και η ροπή αδράνειας του σύρματος που έχει $x>0$, $z>0$ είναι

$$I_z=\int dI_z=\lambda\sqrt{2}\int_0^1 x^2dx=\lambda\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Η συνολική ροπή αδράνειας είναι $\frac{4}{3}\sqrt{2}\lambda$ και η συνιστώσα L_z της στροφορμής του πλαισίου είναι

$$L_z=\frac{4}{3}\sqrt{2}\lambda\omega.$$

Παρατήρηση 1: Στο αποτέλεσμα δεν είναι εμφανές ότι η ροπή αδράνειας I_z έχει διαστάσεις μάζας·μήκος^2. Αυτό οφείλεται στο ότι η εξίσωση $z=1-x$ είναι μαθηματική και όχι φυσική. Για να είναι φυσική πρέπει να γραφεί ως $z=\alpha-x$, με $\alpha=1\,\mathrm{m}$. Επίσης, το όριο $x=1$ είναι μαθηματική και όχι φυσική σχέση. Για να είναι φυσική πρέπει να γραφεί ως $x=\beta$, με $\beta=1\,\mathrm{m}$. Όποιος κάνει τις πράξεις με το α και το β μέσα στο τελικό αποτέλεσμα, θα δει ότι όντως η ροπή αδράνειας I_z έχει διαστάσεις μάζας·μήκος^2. Να το κάνετε. Εγώ το έκανα!!!

Παρατήρηση 2: Λόγω του ότι ο άξονας περιστροφής z είναι άξονας συμμετρίας του σύρματος, η στροφορμή του σύρματος είναι $\vec{L}=L_z\hat{k}$.

Παράδειγμα 7.2: Στο προηγούμενο παράδειγμα, θεωρείστε την επιφάνεια του επιπέδου xz, που περικλείεται από το συρμάτινο πλαίσιο. Η επιφάνεια αυτή έχει μάζα M και η επιφανειακή πυκνότητά της σ (διαστάσεις kg/m^2) είναι ομογενής. Αν η επιφάνεια περιστρέφεται περί τον σταθερό άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω, να βρεθεί η συνιστώσα L_z της στροφορμής της επιφάνειας.

Λύση: Ας θεωρήσομε το $1/4$ της επιφάνειας που βρίσκεται στο τεταρτημόριο $x>0$, $z>0$. Στον θετικό ημιάξονα x και στα σημεία x και $x+dx$ (όπου $0<x<1$) φέρομε ευθείες παράλληλες προς τον άξονα z. Αυτές «κόβουν» από το τεταρτημόριο που είναι κάτω από την ευθεία $z=1-x$ μια λωρίδα πλάτους dx και ύψους $1-x$, δηλαδή εμβαδού $dS=(1-x)dx$. Η λωρίδα έχει μάζα $dm=\sigma\,dS=\sigma(1-x)\,dx$ και απέχει από τον άξονα περιστροφής z απόσταση ίση με x, διότι εμείς την επιλέξαμε έτσι. Άρα, η ροπή αδράνειας της λωρίδας ως προς τον άξονα z είναι $dI_z=dm\,x^2$, η ροπή αδράνειας του τεταρτημορίου είναι

$$I_z = \int dI_z = \sigma \int_0^1 x^2 (1-x)dx = \sigma \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{12}\sigma$$

και η <u>ολική ροπή αδράνειας</u> είναι $I_z = \frac{1}{3}\sigma = \frac{1}{3}\frac{M}{2} = \frac{1}{6}M$, διότι το κάθε τεταρτημόριο έχει εμβαδόν $1/2$ και ο ρόμβος έχει εμβαδόν 2.

<u>Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, το αποτέλεσμα «φαίνεται» να μην έχει σωστές διαστάσεις</u>. Βεβαιωθείτε ότι <u>όντως</u> έχει σωστές διαστάσεις.

Η συνιστώσα L_z της στροφορμής του πλαισίου είναι

$$L_z = I_z \omega = \frac{1}{6} M\omega .$$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, $\vec{L} = L_z \hat{k}$ διότι ο άξονας περιστροφής είναι άξονας συμμετρίας.

Παράδειγμα 7.3: Θεωρείστε έναν ομογενή κύλινδρο μάζας M, ακτίνας R και ύψους h ο οποίος περιστρέφεται περί τον σταθερό άξονα z, που είναι ο άξονας συμμετρίας του, με γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η συνιστώσα L_z της στροφορμής του κυλίνδρου.

Λύση: Θεωρούμε ομοαξονικό κυλινδρικό φλοιό ύψους h μεταξύ των ακτίνων r και $r + dr$, όπου $0 < r < R$. Αν $\rho = M /(\pi R^2 h)$ είναι η πυκνότητα του κυλίνδρου, τότε η μάζα του κυλινδρικού φλοιού είναι $dm = \rho dV$ (dV είναι ο όγκος του) και η ροπή αδράνειάς του είναι $dI_z = dm r^2$. Για να υπολογίσομε τη μάζα dm του κυλινδρικού φλοιού κάνομε το εξής:

Ο όγκος dV του κυλινδρικού φλοιού μεταξύ των ακτίνων r και $r + dr$ είναι

$$dV = h\left[\pi (r + dr)^2 - \pi r^2\right] = h 2\pi r dr$$

διότι ο όρος $(dr)^2$ είναι διαφορικό δευτέρας τάξεως, που είναι αμελητέο σε σχέση με το διαφορικό πρώτης τάξεως dr. Η μάζα του κυλινδρικού φλοιού είναι $dm = \rho 2\pi r dr h$ και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου είναι

$$I_z = \int dI_z = \int_0^M r^2 dm = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\rho h R^4}{2} = \frac{1}{2} MR^2 .$$

Έτσι, η συνιστώσα L_z της στροφορμής του πλαισίου είναι

$$L_z = I_z \omega = \frac{1}{2} MR^2 \omega .$$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, $\vec{L} = L_z\hat{k}$ διότι ο άξονας περιστροφής είναι άξονας συμμετρίας.

Παράδειγμα 7.4: Δίνεται σύρμα, σχήματος U στο επίπεδο xz, γραμμικής πυκνότητας λ, που περιγράφεται από την εξίσωση $z = x^2$ και εκτείνεται από $x = -3$ μέχρι $x = 3$. Το σύρμα μετά περιστρέφεται περί τον σταθερό άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η συνιστώσα L_z της στροφορμής του σύρματος.

Λύση: Στον θετικό ημιάξονα x και στα σημεία x και $x+dx$ (όπου $0 < x < 3$) φέρομε ευθείες παράλληλες προς τον άξονα z. Αυτές «κόβουν» από το σύρμα ένα κομμάτι μήκους $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx\sqrt{1+(dz/dx)^2} = dx\sqrt{1+(2x)^2} = dx\sqrt{1+4x^2}$. Το κομμάτι αυτό του σύρματος έχει μάζα $dm = \lambda ds = \lambda dx\sqrt{1+4x^2}$ και απέχει από το άξονα z κατά x, διότι εμείς το επιλέξαμε έτσι. Άρα, η ροπή αδράνειας του κομματιού ως προς τον άξονα z είναι $dI_z = dm\,x^2$ και η ροπή αδράνειας του σύρματος είναι

$$I_z = \int dI_z = \lambda\int_{-3}^{3} x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx = 2\lambda\int_{0}^{3} x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx = 4\lambda\int_{0}^{3} x^2\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\,dx\,.$$

Χρησιμοποιώντας Πίνακες Ολοκληρωμάτων (π.χ. Mathematical Handbook, Sotiris Persidis, ESPI) βλέπομε ότι

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x(x^2+a^2)^{3/2}}{4} - \frac{a^2x\sqrt{x^2+a^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\,,$$

όπου $a = 1/2$. Έτσι το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος πρέπει να το υπολογίσομε στο $x = 3$ και στο $x = 0$.

Στο τελικό αποτέλεσμα δεν είναι εμφανές ότι η ροπή αδράνειας I_z έχει διαστάσεις μάζας$\cdot$μήκος^2. Αυτό οφείλεται στο ότι η εξίσωση $z = x^2$ είναι μαθηματική και όχι φυσική. Για να είναι φυσική πρέπει να γραφεί ως $z = \beta x^2$, με $\beta = 1\ \mathrm{m}^{-1}$. Επίσης, το $x = 3$ είναι μαθηματική και όχι φυσική σχέση. Για να είναι φυσική πρέπει να γραφεί ως $x = 3\gamma$ με $\gamma = 1\,\mathrm{m}$. Όποιος κάνει τις πράξεις με το β και το γ μέσα στο τελικό αποτέλεσμα, θα δει ότι όντως η ροπή αδράνειας I_z έχει διαστάσεις μάζας$\cdot$μήκος^2. Να το κάνετε. Εγώ το έκανα!

Έτσι, η συνιστώσα L_z της στροφορμής του πλαισίου είναι

$$L_z = I_z\omega\,.$$

Λόγω του ότι ο άξονας περιστροφής z είναι άξονας συμμετρίας του σύρματος, η στροφορμή του σύρματος είναι $\vec{L} = L_z\hat{k}$.

Παράδειγμα 7.5: Στο προηγούμενο παράδειγμα, θεωρείστε την <u>επιφάνεια</u> του επιπέδου xz, που περικλείεται από τις γραμμές $z = x^2$, $|x| = 3$ και $z = 0$. Η επιφάνεια αυτή έχει μάζα και η επιφανειακή πυκνότητά της είναι σ. Αν η επιφάνεια περιστρέφεται περί τον σταθερό άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω, να βρεθεί η συνιστώσα L_z της στροφορμής της επιφάνειας.

Λύση: Στον θετικό ημιάξονα x και στα σημεία x και $x+dx$ (όπου $0 < x < 3$) φέρομε ευθείες παράλληλες προς τον άξονα z. Αυτές «κόβουν» από την επιφάνεια που είναι <u>κάτω</u> από την καμπύλη $z = x^2$ μια λωρίδα πλάτους dx και ύψους x^2, δηλαδή εμβαδού $dS = x^2 dx$. Η λωρίδα έχει μάζα $dm = \sigma\, dS = \sigma\, x^2\, dx$ και απέχει από τον άξονα περιστροφής z απόσταση ίση με x, διότι εμείς την επιλέξαμε έτσι. Άρα, η ροπή αδράνειας της λωρίδας ως προς τον άξονα z είναι $dI_z = dm\, x^2$ και η ροπή αδράνειας της επιφάνειας <u>κάτω</u> από την καμπύλη $z = x^2$ είναι

$$I_z = \int dI_z = \sigma \int_{-3}^{3} x^2 x^2 dx = 2\sigma \int_{0}^{3} x^4 dx = 2\sigma \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^3 = \frac{486}{5}\sigma .$$

<u>Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, το αποτέλεσμα «φαίνεται» να μην έχει σωστές διαστάσεις</u>. Βεβαιωθείτε ότι <u>όντως</u> έχει σωστές διαστάσεις.

Η συνιστώσα L_z της στροφορμής του πλαισίου είναι

$$L_z = I_z \omega = \frac{486}{5}\sigma\omega .$$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, $\vec{L} = L_z \hat{k}$ διότι ο άξονας περιστροφής είναι άξονας συμμετρίας.

Παράδειγμα 7.6: Θεωρείστε στο επίπεδο xy μια ομογενή πλάκα μάζας M, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, απειροστού πάχους, με πλευρές $2a$ και $2b$, παράλληλες προς τους άξονες x και y. Το κέντρο της πλάκας είναι στην αρχή των αξόνων. Η πλάκα περιστρέφεται περί τον σταθερό άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω.
Α) Να βρεθεί η συνιστώσα L_z της στροφορμής της πλάκας.
Β) Να βρεθεί η συνιστώσα L_z της στροφορμής της πλάκας, αν η πλάκα έχει πάχος $2c$ και στον άξονα z εκτείνεται από $-c$ μέχρι c. Η μάζα της παραμένει M.

Λύση: Α) Πρώτα θα βρούμε τη ροπή αδράνειας της πλάκας ως προς τον άξονα z. Το εμβαδόν της πλάκας είναι $4ab$ και η επιφανειακή πυκνότητά της είναι $\sigma = M/(4ab)$. Θεωρούμε μια απειροστή λωρίδα παράλληλη προς τον άξονα y, μεταξύ x και $x+dx$, εύρους dx. Σ' αυτή τη λωρίδα θεωρούμε το απειροστό κομμάτι μεταξύ y και $y+dy$, εμβαδού $dx\,dy$. Το απειροστό αυτό κομμάτι απέχει από τον άξονα z κατά $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ και έχει απειροστή ροπή αδράνειας
$dI = \sigma\, r^2 dx\, dy$. Έτσι η συνολική ροπή αδράνειας της πλάκας είναι

$$I = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{b} dy\, \sigma\, r^2 = \sigma \int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{b} dy\, (x^2 + y^2) = \sigma \int_{-a}^{a} dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{-b}^{b}$$

$$= 2\sigma \int_{-a}^{a} dx \left(x^2 b + \frac{b^3}{3} \right) = 2\sigma \left(\frac{x^3}{3} b + x \frac{b^3}{3} \right) \Bigg|_{-a}^{a} = 4\sigma \left(\frac{a^3}{3} b + a \frac{b^3}{3} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \sigma\, ab\, (a^2 + b^2) = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2)$$

και η συνιστώσα L_z της στροφορμής της πλάκας είναι

$$L_z = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2) \omega .$$

B) Αν η πλάκα έχει πεπερασμένο πάχος και μάζα M το L_z <u>δεν αλλάζει</u>! Αυτό το καταλαβαίνομε <u>ποιοτικά</u> διότι η πεπερασμένου πάχους πλάκα μπορεί να θεωρηθεί σαν υπέρθεση πλακών με απειροστό πάχος η κάθε μια και συνολική μάζα M . Αλλά και <u>ποσοτικά</u> έχομε

$$I = \rho \int_{-c}^{c} dz \int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{b} dy\, (x^2 + y^2) = \rho \int_{-c}^{c} dz \frac{4}{3} ab\, (a^2 + b^2) = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2) ,$$

διότι η πυκνότητα ρ ισούται με $M/(8abc)$ και η απόσταση του απειροστού όγκου $dx\, dy\, dz$ από τον άξονα z είναι $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

7.5 Θεώρημα παραλλήλων αξόνων

Αν γνωρίζομε τη ροπή αδράνειας σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, τότε μπορούμε εύκολα να υπολογίσομε τη ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα παράλληλο προς τον πρώτο.

Ας θεωρήσομε ένα στερεό σώμα (N σωμάτια) μάζας M και τρεις άξονες x^*, y^*, z^*, που η αρχή τους είναι στο κέντρο μάζας του σώματος. Ας υποθέσομε ότι έχομε υπολογίσει τη ροπή αδράνειας I_{z^*} του σώματος ως προς τον άξονα z^* και θέλομε να υπολογίσομε τη ροπή αδράνειας I_z του σώματος ως προς άξονα z, που είναι παράλληλος προς τον z^*. Έχομε

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) , \tag{7.24}$$

όπου r_i είναι η απόσταση της μάζας m_i από τον άξονα z. Επιλέγοντας τους άξονες x, y να είναι παράλληλοι προς τους x^*, y^* αντιστοίχως, γράφομε ότι $x_i = X + x_i^*$ και $y_i = Y + y_i^*$, όπου X, Y είναι οι x- και y-συντεταγμένες του κέντρου μάζας στο σύστημα x, y, z. Όλες οι ποσότητες είναι αλγεβρικές. Με αντικατάσταση στην (7.24) έχομε

$$
\begin{aligned}
I_z &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(X^2 + 2Xx_i^* + x_i^{*2} + Y^2 + 2Yy_i^* + y_i^{*2} \right) \\
&= X^2 \sum_{i=1}^{N} m_i + 2X \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^* + \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^{*2} + Y^2 \sum_{i=1}^{N} m_i + 2Y \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^* + \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^{*2} . \qquad (7.25)
\end{aligned}
$$

Η ποσότητα $\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i^*$ είναι ίση με μηδέν, διότι είναι <u>εξ ορισμού</u> η x-συντεταγμένη του κέντρου μάζας *ως προς το κέντρο μάζας*. Με άλλα λόγια, αφού το κέντρο μάζας είναι στην αρχή των αξόνων x^*, y^*, z^*, οι συντεταγμένες του είναι μηδέν. Έτσι, ο δεύτερος και ο πέμπτος όρος στη σχέση (7.24) είναι μηδέν. Έτσι, η (7.24) γράφεται ως

$$I_z = M\left(X^2 + Y^2\right) + I_{z*} = MD^2 + I_{z*}, \qquad (7.26)$$

όπου $D = \sqrt{X^2 + Y^2}$ είναι η απόσταση του άξονα z από τον άξονα z^* και $I_{z*} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^{*2} + y_i^{*2} \right) = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^{*2}$. Έτσι αποδείξαμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα παραλλήλων αξόνων: Η ροπή αδράνειας σώματος ως προς έναν άξονα ισούται με τη ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα παράλληλο προς αυτόν και διερχόμενο από το κέντρο μάζας του σώματος, συν τη μάζα του σώματος επί το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ των δυο αξόνων.

Παράδειγμα 7.7: Να βρεθεί η ροπή αδράνεια της πλάκας του Παραδείγματος 7.6 ως προς ακμή της που είναι παράλληλη στον άξονα z.

Λύση: Η απόσταση μιας τέτοιας ακμής από τον άξονα z είναι $D = \sqrt{a^2 + b^2}$. Συνεπώς, η ζητούμενη ροπή αδράνειας είναι

$$\frac{1}{3}M(a^2 + b^2) + M(a^2 + b^2) = \frac{4}{3}M(a^2 + b^2).$$

Άσκηση 7.1: Δίνεται <u>συρμάτινο</u> πλαίσιο σχήματος τετραγώνου πλευράς a, συνολικής μάζας m, με τη διαγώνιό του στον άξονα z. Το πλαίσιο περιστρέφεται περί τον σταθερό άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η συνιστώσα L_z της στροφορμής του πλαισίου.

Απάντηση: $L_z = I_z \omega = \frac{1}{6} m a^2 \omega$.

Άσκηση 7.2: Δίνεται τετράγωνη <u>επιφάνεια</u> πλευράς a, συνολικής μάζας m, με τη διαγώνιό της στον άξονα z. Η επιφάνεια περιστρέφεται περί τον σταθερό άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η συνιστώσα L_z της στροφορμής της επιφάνειας.

Απάντηση: $L_z = I_z\omega = \dfrac{1}{12}ma^2\omega$.

Άσκηση 7.3: Δίνεται <u>συρμάτινο</u> πλαίσιο σχήματος τετραγώνου πλευράς a, συνολικής μάζας m, με τη μία πλευρά του στον άξονα z. Το πλαίσιο περιστρέφεται περί τον άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η συνιστώσα L_z της στροφορμής του πλαισίου.

Απάντηση: $L_z = \dfrac{5}{12}ma^2\omega$

Άσκηση 7.4: Δίνεται τετράγωνη <u>επιφάνεια</u> πλευράς a, συνολικής μάζας m, με τη μία πλευρά της στον άξονα z. Η επιφάνεια περιστρέφεται περί τον άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η συνιστώσα L_z της στροφορμής της επιφάνειας.

Απάντηση: $L_z = \dfrac{1}{3}ma^2\omega$

Άσκηση 7.5: Δίνεται συρμάτινο πλαίσιο σχήματος ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου καθέτου πλευράς a, συνολικής μάζας m, με τη μία κάθετο πλευρά του στον άξονα z. Το πλαίσιο περιστρέφεται περί τον άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η συνιστώσα L_z της στροφορμής του πλαισίου.

Απάντηση: $L_z = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3(2+\sqrt{2})}ma^2\omega$.

Άσκηση 7.6: Δίνεται ορθογώνια ισοσκελής τριγωνική επιφάνεια καθέτου πλευράς a, συνολικής μάζας m, με τη μία κάθετο πλευρά της στον άξονα z. Η επιφάνεια περιστρέφεται περί τον άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η συνιστώσα L_z της στροφορμής της επιφάνειας.

Απάντηση: $L_z = \dfrac{1}{6}ma^2\omega$.

Άσκηση 7.7: Δίνεται στο επίπεδο xz <u>συρμάτινο</u> πλαίσιο κυκλικού σχήματος ακτίνας R, συνολικής μάζας m, με το κέντρο του στον άξονα z. Το πλαίσιο μετά περιστρέφεται περί τον άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η συνιστώσα L_z της στροφορμής του πλαισίου.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το σχήμα του Παραδείγματος 4.3.

Απάντηση: $L_z = \frac{1}{2} m R^2 \omega$