ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσομε τις μαθηματικές έννοιες του *εσωτερικού* και του *εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων.*

Ας θεωρήσομε τα τυχόντα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$. Τα διανύσματα αυτά ορίζουν ένα επίπεδο και ας θεωρήσομε ότι η μεταξύ τους γωνία είναι $\theta < \pi$.

Ορισμός: Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B}$ συμβολίζεται ως $\vec{A}\cdot\vec{B}$, είναι βαθμωτό μέγεθος και ορίζεται ως

$$\vec{A}\cdot\vec{B} \equiv A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \equiv \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta = \left|\vec{A}\right|\left(\left|\vec{B}\right|\cos\theta\right) = \left(\left|\vec{A}\right|\cos\theta\right)\left|\vec{B}\right|. \qquad (6.1)$$

Με άλλα λόγια, το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων ορίζεται ως το μέτρο του ενός διανύσματος, επί το μέτρο του άλλου διανύσματος, επί το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας. Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων ορίζεται ως το μέτρο του ενός διανύσματος επί την προβολή του άλλου διανύσματος σ' αυτό.

Ορισμός: Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B}$ συμβολίζεται ως $\vec{A}\times\vec{B}$, είναι διανυσματικό μέγεθος και ορίζεται ως

$$\vec{A}\times\vec{B} \equiv (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) \equiv \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\equiv (A_y B_z - A_z B_y)\,\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\hat{k}. \qquad (6.2)$$

Ισοδύναμος με αυτόν τον ορισμό είναι ο ακόλουθος:

Ορισμός: Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι ένα διάνυσμα $\vec{C}$, <u>κάθετο και στα δυο διανύσματα</u> $\vec{A}$ και $\vec{B}$, που ορίζεται ως εξής: Το μέτρο του είναι

$$\left|\vec{C}\right| \equiv \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta = \left|\vec{A}\right|\left(\left|\vec{B}\right|\sin\theta\right) = \left(\left|\vec{A}\right|\sin\theta\right)\left|\vec{B}\right|, \qquad (6.3)$$

και η κατεύθυνσή του δίνεται από τον *κανόνα του δεξιού χεριού.* Η κατεύθυνση του $\vec{C}$ δίνεται από τον μεσαίο δάκτυλο, αν στον αντίχειρα βάλομε το διάνυσμα $\vec{A}$, στον δείκτη το διάνυσμα $\vec{B}$ και έχομε τα τρία δάκτυλα κάθετα μεταξύ τους. Με άλλα λόγια, το διάνυσμα $\vec{C}$ έχει την κατεύθυνση του *δεξιόστροφου κοχλία* (βίδας). Αν στρίψομε το διάνυσμα $\vec{A}$ προς το διάνυσμα $\vec{B}$, ο κοχλίας θα προχωρήσει προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{C}$.

Από την πρώτη σχέση (6.3) συμπεραίνομε ότι το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων ισούται με το εμβαδό του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δυο διανύσματα. Από τις άλλες δυο σχέσεις (6.3) συμπεραίνομε ότι το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων ισούται με το μέτρο του ενός επί την κάθετη συνιστώσα του άλλου σ' αυτό.

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι το εξωτερικό γινόμενο δυο συγγραμμικών (παραλλήλων ή αντι-παραλλήλων) διανυσμάτων ισούται με το μηδέν διότι $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$. Επίσης, από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία προκύπτει ότι

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}. \tag{6.4}$$

Επίσης, για τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}. \tag{6.5}$$