ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συστήματα μεταβλητής μάζας

Μέχρι τώρα μελετήσαμε την κίνηση υλικού σημείου με συγκεκριμένη μάζα m, η οποία παραμένει σταθερή. Θα εξετάσομε τώρα την περίπτωση που η μάζα δεν είναι σταθερή, αλλά μεταβάλλεται με τον χρόνο.

Ας θεωρήσομε υλικό σημείο μάζας $M(t)$, που τη χρονική στιγμή t έχει ταχύτητα $\vec{u}(t)$ και συνεπώς ορμή $\vec{P}(t) = M(t)\vec{u}(t)$. Ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα για αυτό το υλικό σημείο με τη μεταβλητή μάζα γράφεται ως

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \vec{F}, \tag{5.1}$$

όπου $\vec{F}$ είναι η εξωτερική δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο. Για να κατανοήσομε την (5.1) καλύτερα γράφομε προσεγγιστικά

$$\frac{\Delta\vec{P}(t)}{\Delta t} \approx \vec{F}. \tag{5.2}$$

Για να υπολογίσομε τη μεταβολή της ορμής $\Delta\vec{P}$ γράφομε την ορμή του συστήματος τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ και αφαιρούμε από αυτή την ορμή του συστήματος τη χρονική στιγμή t.

Έστω ότι η μάζα του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ είναι $M(t) + \Delta M$. Το ΔM μπορεί να είναι <u>θετικό</u> ή <u>αρνητικό</u>. Αν είναι θετικό σημαίνει ότι η μάζα του υλικού σημείου αυξάνεται με τον χρόνο, ενώ αν είναι αρνητικό σημαίνει ότι ελαττώνεται με τον χρόνο. Αν θέλομε να έχομε μια συγκεκριμένη εικόνα στο μυαλό μας, τότε σκεπτόμαστε το υλικό σημείο σαν πύραυλο και επομένως $\Delta M < 0$, δηλαδή τα καυσαέρια ελαττώνουν τη μάζα του πυραύλου.

Επειδή μάζα δεν χάνεται, το σύστημά μας τώρα αποτελείται αφενός από το υλικό σημείο με μάζα $M(t) + \Delta M$ και ταχύτητα $\vec{u}(t) + \Delta\vec{u}$ και αφετέρου από τη μάζα $-\Delta M$ που κινείται, ας πούμε, με ταχύτητα $\vec{u}\,'(t)$. Έτσι η (5.2) γράφεται

$$\frac{\left[(M + \Delta M)(\vec{u} + \Delta\vec{u}) + (-\Delta M)\vec{u}\,'\right] - M\vec{u}}{\Delta t} \approx \vec{F} \tag{5.3}$$

και με πράξεις έχομε

$$\vec{u}\frac{\Delta M}{\Delta t} + M\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} + \frac{\Delta M \Delta\vec{u}}{\Delta t} - \vec{u}\,'\frac{\Delta M}{\Delta t} \approx \vec{F}. \tag{5.4}$$

Παίρνομε τώρα το όριο $\Delta t \to 0$ και έχομε

$$M\frac{d\vec{u}}{dt}+\vec{u}\frac{dM}{dt}-\vec{u}'\frac{dM}{dt}=\vec{F}\,, \tag{5.5}$$

διότι ο τρίτος όρος στο αριστερό μέλος της (5.4) τείνει στο μηδέν αφού ο αριθμητής είναι διαφορικό δευτέρας τάξεως ενώ ο παρονομαστής είναι διαφορικό πρώτης τάξεως. Τον όρο αυτόν μπορείτε να τον δείτε είτε ως $\Delta M\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}$ είτε ως $\frac{\Delta M}{\Delta t}\Delta\vec{u}$. Και στις δυο μορφές τείνει στο μηδέν για $\Delta t\to 0$.

Η εξίσωση (5.5) γράφεται ως

$$\frac{d}{dt}(M\vec{u})-\vec{u}'\frac{dM}{dt}=\vec{F} \tag{5.6}$$

και αυτή είναι η εξίσωση κίνησης υλικού σημείου με μεταβλητή μάζα. Βλέπομε αμέσως ότι δεν θα παίρναμε τη σωστή εξίσωση κίνησης αν στην (5.1) αντικαθιστούσαμε το $\vec{P}$ με το $M\vec{u}$!!!

Η εξίσωση κίνησης (5.5) γράφεται και ως

$$M\frac{d\vec{u}}{dt}=\vec{F}+(\vec{u}'-\vec{u})\frac{dM}{dt} \tag{5.7}$$

ή

$$M\frac{d\vec{u}}{dt}=\vec{F}+\vec{u}_{\sigma\chi\varepsilon\tau}\frac{dM}{dt}\,, \tag{5.8}$$

όπου

$\vec{u}_{\sigma\chi\varepsilon\tau}\equiv\vec{u}'-\vec{u}$ είναι η *σχετική* ταχύτητα της μάζας $-\Delta M$ ως προς τη μάζα M, π.χ. των καυσαερίων σε σχέση με τον πύραυλο.

Στην περίπτωση πυραύλου, ο όρος $\vec{u}_{\sigma\chi\varepsilon\tau}\frac{dM}{dt}$ λέγεται *δύναμη προώθησης*. Έτσι στον πύραυλο ασκείται η εξωτερική δύναμη $\vec{F}$ και η δύναμη προώθησης $\vec{u}_{\sigma\chi\varepsilon\tau}\frac{dM}{dt}$. Όσο πιο γρήγορα (σε σχέση με τον πύραυλο) εκτοξεύονται τα καυσαέρια και όσο μεγαλύτερος είναι ο ρυθμός κατανάλωσης καυσίμου $\frac{dM}{dt}$, τόσο μεγαλύτερη είναι η προωθητική δύναμη.

Παράδειγμα 5.1: Ένας πύραυλος, που εκτοξεύεται τη χρονική στιγμή $t=0$ κατακόρυφα προς τα πάνω από ακινησία, καίει καύσιμο με σταθερό ρυθμό $\frac{dM}{dt}=-\lambda$, όπου $\lambda>0$, M είναι η στιγμιαία μάζα του πυραύλου και M_0 είναι η αρχική μάζα του. Η σχετική ταχύτητα των καυσαερίων ως προς τον πύραυλο είναι $\vec{u}_{\sigma\chi\varepsilon\tau}=$ σταθερή $=-u_0'\hat{k}$, $u_0'>0$. Τριβές δεν υπάρχουν. Να βρεθεί η ταχύτητα του πυραύλου στα πρώτα στάδια της εκτόξευσης, δηλαδή όταν ο πύραυλος είναι κοντά στη Γη, όπου το πεδίο βαρύτητας είναι σταθερό.

Λύση: Η εξίσωση κίνησης (5.8), για κίνηση στον κατακόρυφο άξονα z που τον παίρνομε να έχει φορά προς τα <u>πάνω</u>, είναι

$$M \frac{du_z}{dt} \hat{k} = -Mg\hat{k} + (-u_0'\hat{k})(-\lambda)$$

ή

$$M \frac{du_z}{dt} = -Mg + u_0'\lambda \,. \qquad (*)$$

Με άλλα λόγια, δεν χρειάζεται να βάζομε το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα όταν όλοι οι όροι έχουν το ίδιο μοναδιαίο διάνυσμα.

Αλλά, επειδή τα καύσιμα καίγονται με σταθερό ρυθμό λ, η μάζα του πυραύλου την τυχούσα χρονική στιγμή $t > 0$ είναι $M(t) = M_0 - \lambda t$, όπου θεωρήσαμε ότι η μάζα του πυραύλου αποτελείται ουσιαστικά από καύσιμα. Συνεπώς η εξίσωση κίνησης (*) γράφεται ως

$$\frac{du_z}{dt} = -g + \frac{u_0'\lambda}{M_0 - \lambda t}$$

ή

$$du_z = -g\,dt + \frac{u_0'\lambda}{M_0 - \lambda t}dt \,.$$

Ολοκληρώνοντας αμφότερα τα μέλη έχομε

$$u_z(t) = -g\,t + \int \frac{u_0'\lambda}{M_0 - \lambda t}dt + C \,,$$

όπου C είναι αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Αυτή γράφεται ως

$$u_z(t) = -g\,t - u_0' \int \frac{d(M_0 - \lambda t)}{M_0 - \lambda t} + C \,,$$

ή

$$u_z(t) = -g\,t - u_0' \ln\left|M_0 - \lambda t\right| + C \,.$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχομε ότι $u_z(0) = 0$, που συνεπάγεται ότι $C = u_0' \ln M_0$ και η ζητούμενη λύση είναι

$$u_z(t) = -g\,t + u_0' \ln \frac{M_0}{M_0 - \lambda t} \,.$$

Το αποτέλεσμα έχει διαστάσεις ταχύτητας και η ποσότητα που λογαριθμίζεται είναι αδιάστατη, όπως πρέπει. Για u_0' και λ αρκετά μεγάλα, ο δεύτερος όρος είναι μεγαλύτερος από τον πρώτο και ο πύραυλος εκτοξεύεται.

<u>Παρατήρηση:</u> Θα μπορούσαμε να μην έχομε αντικαταστήσει το $M(t)$ με $M_0 - \lambda t$ και να γράφαμε την εξίσωση (*) ως

$$M\frac{du_z}{dt} = -Mg + u_0'\left(-\frac{dM}{dt}\right)$$

ή

$$\frac{du_z}{dt} = -g + \frac{u_0'}{M}\left(-\frac{dM}{dt}\right)$$

ή

$$du_z = -g\,dt - u_0'\frac{dM}{M}$$

και με ορισμένα ολοκληρώματα

$$\int_0^{u_z} du_z = -g\int_0^t dt - u_0'\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M}$$

ή

$$u_z(t) = -g\,t + u_0'\ln\frac{M_0}{M},$$

που είναι το ίδιο με αυτό που βρήκαμε πριν.

Παράδειγμα 5.2: Πλαστική μπάλα αμελητέας μάζας περιέχει πεπιεσμένο αέρα μάζας M_0. Τη χρονική στιγμή $t=0$ η μπάλα βάλλεται στο επίπεδο xz υπό γωνία θ ως προς τον οριζόντιο άξονα x, με αρχική ταχύτητα $u_0 > 0$. Για $t > 0$ μια μικρή τρύπα στη μπάλα αφήνει αέρα να διαρρέει με σταθερό ρυθμό $\lambda > 0$ και σταθερή ταχύτητα ως προς τη μπάλα $\vec{u}_{\sigma\chi\varepsilon\tau}$ = σταθερή $= -u_1\,\hat{i}$, $u_1 > 0$. Το πεδίο βαρύτητας είναι σταθερό και τριβές δεν υπάρχουν.

Α) Να γραφεί η εξίσωση κίνησης της μπάλας υπό μορφή συνιστωσών

Β) Να βρεθεί η x συνιστώσα της ταχύτητας της μπάλας ως συνάρτηση του χρόνου.

Γ) Να βρεθεί η z συνιστώσα της ταχύτητας της μπάλας ως συνάρτηση του χρόνου.

Δ) Οι λύσεις που βρήκατε σας ικανοποιούν; Ναι, όχι και γιατί;

Λύση: Θεωρούμε τον άξονα z προς τα πάνω και τον άξονα x οριζόντιο και θετικό προς τα δεξιά. Από την εξίσωση (5.8) έχομε

$$M\frac{d(u_x\hat{i} + u_z\hat{k})}{dt} = -Mg\hat{k} + (-u_1\hat{i})(-\lambda)\,.$$

Α) Εξισώνοντας χωριστά τους όρους του $\hat{i}$ και τους όρους του $\hat{k}$ παίρνομε

$$M\frac{du_x}{dt} = u_1\lambda ,$$

$$M\frac{du_z}{dt} = -Mg .$$

Β) Για τη λύση της πρώτης γράφομε

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{u_1\lambda}{M} \quad \text{ή} \quad \frac{du_x}{dt} = \frac{u_1\lambda}{M_0 - \lambda t} \quad \text{ή} \quad du_x = \frac{u_1\lambda}{M_0 - \lambda t}dt .$$

Συνεπώς

$$\int_{u_0\cos\theta}^{u_x} du_x = \int_0^t \frac{u_1\lambda}{M_0 - \lambda t}dt \quad \text{ή} \quad u_x(t) = u_0\cos\theta + u_1\ln\frac{M_0}{M_0 - \lambda t} .$$

Γ) Για τη λύση της δεύτερης γράφομε

$$\frac{du_z}{dt} = -g ,$$

που τη λύση της

$$u_z(t) = u_0\sin\theta - gt$$

την είδαμε στο Παράδειγμα 2.1.

Δ) Οι λύσεις είναι ικανοποιητικές διότι στην άξονα z έχομε ελεύθερη πτώση στο σταθερό πεδίο βαρύτητας, ενώ στον άξονα x υπάρχει δύναμη προώθησης που αυξάνει την ταχύτητα.

Παράδειγμα 5.3: Πλαστική σφαιρική μπάλα αμελητέας μάζας περιέχει πεπιεσμένο αέρα μάζας M_0 και κινείται χωρίς τριβές και επίδραση εξωτερικών δυνάμεων με ταχύτητα $\vec{u} = u_0\,\hat{i}$, $u_0 > 0$, έτσι ώστε το κέντρο της μπάλας να είναι πάνω στον άξονα x . Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ανοίγει μια σημειακή τρύπα στην επιφάνεια της μπάλας τέτοια ώστε η ευθεία που ενώνει την τρύπα με το κέντρο της σφαίρας να είναι στο οριζόντιο επίπεδο xy και κάθετη στον άξονα x . Θεωρείστε ότι η τρύπα αφήνει αέρα να διαρρέει με σταθερό ρυθμό $\lambda > 0$ και σταθερή ταχύτητα $\vec{u}' =$ σταθερή $= u_0'\,\hat{j}$, $u_0' > 0$. Βαρύτητα δεν υπάρχει.
Α) Να γραφεί η εξίσωση κίνησης της μπάλας υπό μορφή συνιστωσών
Β) Να βρεθεί η x συνιστώσα της ταχύτητας της μπάλας ως συνάρτηση του χρόνου.
Γ) Να βρεθεί η y συνιστώσα της ταχύτητας της μπάλας ως συνάρτηση του χρόνου.

Λύση: Θεωρούμε σύστημα αξόνων x και y . Από την εξίσωση (5.5) έχομε

$$M\frac{d(u_x\hat{i} + u_y\hat{j})}{dt} + (u_x\hat{i} + u_y\hat{j})\frac{dM}{dt} - (u_0'\hat{j})\frac{dM}{dt} = 0 .$$

Α) Εξισώνοντας χωριστά τους όρους του $\hat{i}$ και τους όρους του $\hat{j}$ παίρνομε

$$M\frac{du_x}{dt}+u_x\frac{dM}{dt}=0\,, \qquad (**)$$

$$M\frac{du_y}{dt}+u_y\frac{dM}{dt}-u_0'\frac{dM}{dt}=0\,.$$

Β) Για τη λύση της πρώτης γράφομε μετά από πολλαπλασιασμό με dt

$$M\,du_x+u_x dM=0$$

ή

$$\frac{du_x}{u_x}=-\frac{dM}{M}\,.$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη έχομε

$$\int_{u_0}^{u_x}\frac{du_x}{u_x}=-\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M}$$

ή

$$\ln\left|\frac{u_x}{u_0}\right|=-\ln\left|\frac{M}{M_0}\right|=\ln\left|\frac{M_0}{M}\right|$$

ή

$$\ln\frac{u_x}{u_0}=\ln\frac{M_0}{M}=\ln\frac{M_0}{M_0-\lambda t}$$

ή

$$u_x(t)=u_0\frac{M_0}{M_0-\lambda t}\,,\quad t\geq 0\,.$$

ή

$$u_x(t)=u_0\frac{M_0}{M(t)}\,,\quad t\geq 0\,.$$

Αυτή η λύση ήταν αναμενόμενη αφού η σχέση (**) γράφεται ως

$$\frac{d(Mu_x)}{dt}=0 \;\Rightarrow\; Mu_x=\text{ σταθερό }=M_0u_0\,.$$

Γ) Για τη δεύτερη γράφομε

$$\frac{d}{dt}(Mu_y)+u_0'\lambda=0 \;\Rightarrow\; \frac{d(Mu_y)}{dt}=-u_0'\lambda \;\Rightarrow\; d(Mu_y)=-u_0'\lambda\,dt\,.$$

Με ολοκλήρωση αμφοτέρων των μελών έχομε

$$M(t)\,u_y(t)=-u_0'\lambda+C\,,$$

όπου η σταθερά $C = 0$ λόγω αρχικών συνθηκών. Έτσι

$$u_y(t) = -\frac{u_0' \lambda t}{M_0 - \lambda t}.$$

Άσκηση 5.1: Ένας πύραυλος ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ηρεμία στη θέση $x = 0$ και κινείται κατά μήκος του οριζοντίου άξονα x. Ο ρυθμός με τον οποίο καίει καύσιμα είναι $\frac{dM}{dt} = -\lambda$, όπου $\lambda > 0$ και M είναι η στιγμιαία μάζα του πυραύλου. Η σχετική ταχύτητα των καυσαερίων ως προς τον πύραυλο είναι $\vec{u}_{\sigma\chi\varepsilon\tau}$ = σταθερή $= -u_0' \hat{i}$, $u_0' > 0$. Η μάζα του πυραύλου (δηλαδή το μεταλλικό μέρος) είναι M_π και η αρχική μάζα των καυσίμων είναι M_κ. Θεωρείστε ότι τριβές και βαρύτητα δεν υπάρχουν. Να βρεθεί η ταχύτητα του πυραύλου για $t > 0$.

Απάντηση: $u(t) = u_0' \ln \frac{M_\pi + M_\kappa}{M_\pi + M_\kappa - \lambda t}$.

Άσκηση 5.2: Θεωρείστε ομογενή αλυσίδα μήκους L και μάζας M_0 στον οριζόντιο άξονα x μεταξύ των σημείων $x = 0$ και $x = L$. Ένας <u>κινούμενος</u> γερανός πιάνει τη χρονική στιγμή $t = 0$ το άκρο της αλυσίδας που είναι στο $x = L$ και αρχίζει να ανυψώνει την αλυσίδα με σταθερή ταχύτητα $u_0 > 0$, έτσι ώστε το ανυψωμένο κομμάτι της αλυσίδας να είναι πάντοτε κατακόρυφο. Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί ο γερανός ως συνάρτηση του χρόνου, μέχρι να ανυψωθεί πλήρως η αλυσίδα.

Απάντηση: $F = \frac{M_0}{L} u_0 (gt + u_0), \qquad 0 < t < \frac{L}{u_0}$

Άσκηση 5.3: Μια σταγόνα νερού σχηματίζεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ σε ένα ακίνητο σύννεφο και αρχίζει να πέφτει λόγω βαρύτητας. Καθώς πέφτει, η μάζα της <u>αυξάνεται</u> με ρυθμό ανάλογο της στιγμιαίας μάζας της, με σταθερά αναλογίας $\lambda > 0$. Να βρεθεί η ταχύτητα της σταγόνας για $t > 0$.

Δίνεται ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{du}{dt} + \lambda u = g$ είναι $u(t) = \frac{g}{\lambda} + Ce^{-\lambda t}$, όπου C είναι αυθαίρετη πραγματική σταθερά.

Απάντηση: $u(t) = \frac{g}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$.

Άσκηση 5.4: Μια σταγόνα νερού σχηματίζεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ σε ένα ακίνητο σύννεφο στη θέση $z = 0$ και αρχίζει να πέφτει λόγω βαρύτητας. Θεωρείστε τον κατακόρυφο άξονα z προς τα κάτω. Καθώς πέφτει, η μάζα της <u>αυξάνεται</u> με ρυθμό ανάλογο του γινομένου της στιγμιαίας μάζας της και της ταχύτητάς της, με σταθερά αναλογίας $\kappa > 0$. Να βρεθεί η ταχύτητα της σταγόνας για $t > 0$ <u>ως συνάρτηση της θέσης</u> z.

<u>Υπόδειξη:</u> Χρησιμοποιείστε τη σχέση $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{du}{dz}u = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(u^2\right)$.

Απάντηση: $u(z) = \sqrt{\frac{g}{\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa z}\right)}$.

Άσκηση 5.5: Πλαστική σφαιρική μπάλα αμελητέας μάζας περιέχει πεπιεσμένο αέρα μάζας M_0 και κινείται χωρίς τριβές και επίδραση εξωτερικών δυνάμεων με ταχύτητα $\vec{u} = u_0\,\hat{i}$, $u_0 > 0$, έτσι ώστε το κέντρο της μπάλας να είναι πάνω στον άξονα x. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ανοίγει μια σημειακή τρύπα στην επιφάνεια της μπάλας τέτοια ώστε η διαρροή του αέρα να γίνεται με σχετική ταχύτητα ως προς τη μπάλα $\vec{u}_{\sigma\chi\varepsilon\tau}$ = σταθερή $= u_0\,\hat{j}$, $u_0 > 0$. Θεωρείστε ότι η τρύπα αφήνει αέρα να διαρρέει με σταθερό ρυθμό $\lambda > 0$ και ότι βαρύτητα δεν υπάρχει.

Α) Να γραφεί η εξίσωση κίνησης της μπάλας υπό μορφή συνιστωσών

Β) Να βρεθεί η x συνιστώσα της ταχύτητας της μπάλας ως συνάρτηση του χρόνου.

Γ) Να βρεθεί η y συνιστώσα της ταχύτητας της μπάλας ως συνάρτηση του χρόνου.

Απάντηση: Β) $u_x(t) = u_0$. Γ) $u_y(t) = -u_0 \ln\frac{M_0}{M_0 - \lambda t}$.

Άσκηση 5.6: Πλαστική μπάλα αμελητέας μάζας περιέχει πεπιεσμένο αέρα μάζας M_0. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η μπάλα βάλλεται στο επίπεδο xz υπό γωνία θ ως προς τον οριζόντιο άξονα x, με αρχική ταχύτητα $u_0 > 0$. Για $t > 0$ μια μικρή τρύπα στη μπάλα αφήνει αέρα να διαρρέει με σταθερό ρυθμό $\lambda > 0$ και σταθερή ταχύτητα ως προς τη μπάλα $\vec{u}_{\sigma\chi\varepsilon\tau}$ = σταθερή $= -u_1\,\hat{k}$, $u_1 > 0$. Το πεδίο βαρύτητας είναι σταθερό και τριβές δεν υπάρχουν.

Α) Να γραφεί η εξίσωση κίνησης της μπάλας υπό μορφή συνιστωσών

Β) Να βρεθεί η x συνιστώσα της ταχύτητας της μπάλας ως συνάρτηση του χρόνου.

Γ) Να βρεθεί η z συνιστώσα της ταχύτητας της μπάλας ως συνάρτηση του χρόνου.

Δ) Οι λύσεις που βρήκατε σας ικανοποιούν; Ναι, όχι και γιατί;

Απάντηση: Β) $u_x(t) = u_0 \cos\theta$. Γ) $u_z(t) = u_0 \sin\theta - gt + u_1 \ln\frac{M_0}{M_0 - \lambda t}$.