ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Διατήρηση ορμής

Ας θεωρήσομε δυο υλικά σημεία 1 και 2, με μάζες m_1 και m_2 αντιστοίχως, που βρίσκονται την τυχούσα χρονική στιγμή στις αντίστοιχες διανυσματικές ακτίνες $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ και έχουν αντίστοιχες ταχύτητες $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$. Ας υποθέσομε ότι το υλικό σημείο 1 ασκεί στο 2 δύναμη $\vec{F}_{12}$ και ότι το 2 ασκεί στο 1 δύναμη $\vec{F}_{21}$. Π.χ., ένα θετικό και ένα αρνητικό φορτίο στον χώρο ασκούν ίσες και αντίθετες ελκτικές δυνάμεις το ένα στο άλλο. Επίσης, ας θεωρήσομε ότι δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στα υλικά σημεία.

Από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα έχομε ότι

$$m_1 \frac{d\vec{u}_1}{dt} = \vec{F}_{21} \tag{4.1}$$

$$m_2 \frac{d\vec{u}_2}{dt} = \vec{F}_{12} \tag{4.2}$$

Και από τον Τρίτο Νόμο του Νεύτωνα έχομε ότι $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Από τον συνδυασμό των δυο νόμων παίρνομε

$$m_1 \frac{d\vec{u}_1}{dt} = -m_2 \frac{d\vec{u}_2}{dt} \tag{4.3}$$

ή

$$\frac{d(m_1\vec{u}_1)}{dt} = -\frac{d(m_2\vec{u}_2)}{dt}$$

ή

$$\frac{d(m_1\vec{u}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\vec{u}_2)}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2) = 0\,. \tag{4.4}$$

Ορίζομε ως *ορμή* του υλικού σημείου 1 το $\vec{p}_1 \equiv m_1\vec{u}_1$, ως *ορμή* του υλικού σημείου 2 το $\vec{p}_2 \equiv m_2\vec{u}_2$ και ως *συνολική ορμή* του συστήματος των δυο σημείων το $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Τότε η (4.4) γράφεται ως

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \tag{4.5}$$

ή

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{σταθερό.} \tag{4.6}$$

Αποδείξαμε λοιπόν το θεώρημα διατήρησης της ορμής.

Θεώρημα 4.1: Αν σε σύστημα δυο αλληλεπιδρώντων υλικών σημείων δεν ασκείται εξωτερική δύναμη, η συνολική ορμή του συστήματος διατηρείται.

4.1 Κέντρο μάζας

Ας γενικεύσομε τώρα το παραπάνω θεώρημα για περισσότερα των δυο υλικών σημείων. Ας θεωρήσομε N υλικά σημεία 1, 2, 3, … N με μάζες m_1, m_2 , m_3, …, m_N , αντιστοίχως, που βρίσκονται την τυχούσα χρονική στιγμή στις αντίστοιχες διανυσματικές ακτίνες $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$, …, $\vec{r}_N$. Ας υποθέσομε ότι το υλικό σημείο i ασκεί στο υλικό σημείο j δύναμη $\vec{F}_{ij}$, όπου $1 \le i \ne j \le N$. Επίσης, ας θεωρήσομε ότι στο υλικό σημείο i, $1 \le i \le N$, ασκείται εξωτερική δύναμη $\vec{F}_i$. Από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα έχομε

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} + \ldots \tag{4.7}$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{42} + \ldots \tag{4.8}$$

$$m_3 \frac{d^2\vec{r}_3}{dt^2} = \vec{F}_3 + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{43} + \ldots \tag{4.9}$$

.
.
.

$$m_N \frac{d^2\vec{r}_N}{dt^2} = \vec{F}_N + \vec{F}_{1N} + \vec{F}_{2N} + \vec{F}_{3N} + \ldots \tag{4.10}$$

Προσθέτομε όλες τις εξισώσεις κατά μέλη και έχομε

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} + m_3 \frac{d^2\vec{r}_3}{dt^2} + \ldots + m_N \frac{d^2\vec{r}_N}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_N , \tag{4.11}$$

διότι από τον Τρίτο Νόμο του Νεύτωνα έχομε ότι $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. Η τελευταία εξίσωση γράφεται ως

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \ldots + m_N\vec{r}_N) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_N \tag{4.12}$$

ή

$$M \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{M} \right) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_N , \tag{4.13}$$

όπου $M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_N$ είναι η ολική μάζα του συστήματος των N υλικών σημείων. Αν τη διανυσματική ποσότητα

$$\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + ... + m_N\vec{r}_N}{M}, \qquad (4.14)$$

που γράφεται και ως

$$\frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 + \frac{m_3}{M}\vec{r}_3 + ... + \frac{m_N}{M}\vec{r}_N, \qquad (4.15)$$

τη συμβολίσομε με $\vec{R}$, τότε η εξίσωση (4.13) γράφεται ως

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... + \vec{F}_N. \qquad (4.16)$$

Αν δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στα υλικά σημεία, τότε η εξίσωση (4.12) γράφεται ως

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 + m_3\vec{u}_3 + ... + m_N\vec{u}_N) = 0, \qquad (4.17)$$

που είναι ο νόμος διατήρησης της ορμής συστήματος N αλληλεπιδρώντων υλικών σημείων, στα οποία δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις.

Ας δούμε τώρα τη φυσική σημασία της εξίσωσης (4.16). Αν θεωρήσομε το $\vec{R}$ ως τη διανυσματική ακτίνα ενός <u>νοητού</u> υλικού σημείου με μάζα M, τότε η εξίσωση (4.16) είναι η εξίσωση κίνησης αυτού του νοητού υλικού σημείου υπό την επίδραση της συνισταμένης των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, …, $\vec{F}_N$.

Αξίζει λοιπόν να δούμε που βρίσκεται αυτό το νοητό υλικό σημείο σε σχέση με τα πραγματικά υλικά σημεία 1, 2, 3, … N. Από τον ορισμό του $\vec{R}$

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + ... + m_N\vec{r}_N}{M} = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 + \frac{m_3}{M}\vec{r}_3 + ... + \frac{m_N}{M}\vec{r}_N \qquad (4.17)$$

βλέπομε ότι το διάνυσμα $\vec{R}$ φτιάχνεται από «ποσοστά» $\frac{m_i}{M}$ των $\vec{r}_i$, $1 \le i \le N$. Άρα το νοητό υλικό σημείο είναι «κάπου μεταξύ» των πραγματικών υλικών σημείων και είναι πολύ πιθανό να μη συμπίπτει με κανένα από αυτά. Αυτό το νοητό σημείο λέγεται *κέντρο μάζας* των υλικών σημείων 1, 2, 3, … N. Με την εξίσωση (4.16) αποδείξαμε λοιπόν το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 4.2: Το κέντρο μάζας αλληλεπιδρώντων υλικών σημείων κινείται σαν όλες οι μάζες να ήταν συγκεντρωμένες εκεί και να ασκείται σ' αυτό η συνισταμένη των <u>εξωτερικών</u> δυνάμεων που ασκούνται στα υλικά σημεία.

Για να κατανοήσομε καλύτερα τον ορισμό (4.17) του κέντρου μάζας, ας τον εφαρμόσομε σε δυο υλικά σημεία. Ας θεωρήσομε δυο υλικά σημεία 1 και 2, με μάζες m_1 και m_2 αντιστοίχως, που βρίσκονται την τυχούσα χρονική στιγμή στις θέσεις x_1 και x_2 του άξονα x. Οι διανυσματικές ακτίνες των υλικών σημείων είναι $\vec{r}_1 = x_1\hat{i}$ και $\vec{r}_2 = x_2\hat{i}$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (4.17) έχομε

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 x_1 \hat{i} + m_2 x_2 \hat{i}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \hat{i} = X \hat{i} \,, \tag{4.18}$$

όπου

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \,. \tag{4.19}$$

Ας δούμε τώρα αν αυτό το X μπορούμε να το βρούμε με τον απλό τρόπο που χρησιμοποιούσαμε στο Λύκειο για το κέντρο μάζας. Αν X είναι το σημείο του κέντρου μάζας στον άξονα x, τότε αυτό το σημείο είναι κάπου μεταξύ των σημείων x_1 και $x_2 > x_1$. Αν θέλετε μπορείτε να θεωρήσετε ότι τα x_1, x_2 είναι θετικές ποσότητες, αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο. Γράφομε λοιπόν

$$m_1 (X - x_1) = m_2 (x_2 - X) \,, \tag{4.20}$$

όπου $X - x_1$ είναι η απόσταση της μάζας 1 από το κέντρο μάζας και $x_2 - X$ είναι η αντίστοιχη απόσταση για τη μάζα 2. Λύνοντας ως προς X παίρνομε την (4.19).

Παρατήρηση: Μπορεί να είναι πολύ δύσκολο να περιγράψομε την κίνηση ενός στερεού σώματος μάζας M στον χώρο υπό την επίδραση της βαρύτητας, διότι το σώμα μπορεί να περιστρέφεται καθώς κινείται. Όμως, το <u>κέντρο μάζας</u> του σώματος κάνει πολύ απλή κίνηση, που περιγράφεται από την εξίσωση

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = M\vec{g} \,, \tag{4.21}$$

όπου $M\vec{g}$ είναι η δύναμη της βαρύτητας. Τη λύση αυτής της εξίσωσης την είδαμε στο Παράδειγμα 2.1.

Ιδιότητες του κέντρου μάζας: Το κέντρο μάζας ενός <u>ομογενούς</u> σώματος έχει τις εξής ιδιότητες, που αποδεικνύονται πολύ εύκολα:

1. Αν το σώμα έχει σημείο συμμετρίας, τότε το κέντρο μάζας του είναι αυτό το σημείο συμμετρίας. Π.χ., το κέντρο σφαίρας ή σφαιρικού φλοιού είναι το κέντρο μάζας του σώματος. Ομοίως για κύλινδρο ή κυλινδρικό φλοιό.
2. Αν το σώμα έχει άξονα συμμετρίας, τότε το κέντρο μάζας του είναι πάνω στον άξονα συμμετρίας. Π.χ., το κέντρο μάζας κώνου είναι πάνω στον άξονα συμμετρίας του.
3. Αν το σώμα έχει δυο άξονες συμμετρίας, τότε το κέντρο μάζας του είναι στην τομή των δυο αξόνων συμμετρίας.
4. Αν το σώμα έχει επίπεδο συμμετρίας, τότε το κέντρο μάζας του είναι πάνω στο επίπεδο συμμετρίας.
5. Αν ένα σώμα αποτελείται από δυο μέρη, ας πούμε A και B, με μάζες M_A και M_B αντιστοίχως, τότε το κέντρο μάζας του σώματος μπορεί να βρεθεί θεωρώντας μάζα M_A στο κέντρο μάζας του A και μάζα M_B στο κέντρο μάζας του B.

Άσκηση 4.1: Να αποδειχτούν οι παραπάνω ιδιότητες. Λάβετε υπόψη σας ότι από τον ορισμό (4.17) έχομε ότι οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας N υλικών σημείων είναι

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + ... + m_N x_N}{M},$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + ... + m_N y_N}{M},$$

$$Z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + ... + m_N z_N}{M}.$$

Εύρεση κέντρου μάζας σώματος: Για σύστημα *διακριτών* υλικών σημείων η έκφραση (4.17) μάς δίνει τη διανυσματική ακτίνα του κέντρου μάζας τους. Τι γίνεται όμως αν τα υλικά σημεία δεν είναι διακριτά, αλλά είναι τα άτομα ενός στερεού σώματος; Σ' αυτήν την περίπτωση η κατανομή της μάζας είναι *συνεχής* και όχι διακριτή. Άρα πρέπει να γενικεύσομε την έκφραση (4.17) για συνεχή κατανομή μάζας.

Ας θεωρήσομε στερεό σώμα μάζας M με πυκνότητα ρ και ας θεωρήσομε έναν απειροστό όγκο του σώματος dV στη διανυσματική ακτίνα $\vec{r}$. Σ' αυτόν τον όγκο υπάρχει η απειροστή μάζα $dm = \rho\, dV$. Κατ' αναλογία λοιπόν προς τη σχέση (4.17) γράφομε

$$\vec{R} = \frac{\int_{(M)} dm\, \vec{r}}{M} = \frac{\int_{(V)} \rho\, \vec{r}\, dV}{M}, \qquad (4.22)$$

όπου το σύμβολο (M) ή (V) στο ολοκλήρωμα σημαίνει ότι πρέπει να ολοκληρώσομε ως προς όλη τη μάζα M ή όλον τον όγκο V του στερεού σώματος. Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας δίνονται από

$$X = \frac{\int_{(M)} dm\, x}{M} = \frac{\int_{(V)} \rho\, x\, dV}{M}, \quad Y = \frac{\int_{(M)} dm\, y}{M} = \frac{\int_{(V)} \rho\, y\, dV}{M}, \quad Z = \frac{\int_{(M)} dm\, z}{M} = \frac{\int_{(V)} \rho\, z\, dV}{M} \qquad (4.23)$$

Για σταθερή πυκνότητα έχομε ότι $\rho = M / V$, όπου V είναι ο όγκος του σώματος. Έτσι, <u>για ομογενή σώματα</u> οι εξισώσεις (4.23) γίνονται

$$X = \frac{\int_{(V)} x\, dV}{V}, \qquad Y = \frac{\int_{(V)} y\, dV}{V}, \qquad Z = \frac{\int_{(V)} z\, dV}{V}. \qquad (4.24)$$

Με άλλα λόγια, το κέντρο μάζας ομογενούς σώματος συμπίπτει με το λεγόμενο *κεντροειδές* του, του οποίου οι συντεταγμένες δίνονται από τις εξισώσεις (4.24).

Παράδειγμα 4.1: Να βρεθεί το κέντρο μάζας ομογενούς ημισφαιρίου μάζας M και ακτίνας R.

Λύση: Η πυκνότητα του ημισφαιρίου είναι $\rho = \dfrac{M}{(2/3)\pi R^3}$. Ας θεωρήσομε ότι ο άξονας z είναι ο άξονας συμμετρίας του ημισφαιρίου και ότι η κυκλική βάση του είναι στο επίπεδο xy. Άρα, το κέντρο μάζας του βρίσκεται στον άξονα z (ιδιότητα 2 του κέντρου μάζας) και η συντεταγμένη του Z δίνεται από

$$Z = \frac{\int_{(M)} dm\, z}{M}.$$

Το πώς θα διαμερίσομε τη μάζα M σε απειροστά κομμάτια dm είναι δική μας επιλογή, αρκεί στο τέλος να έχομε πάρει όλη τη μάζα M. Κόβομε λοιπόν το ημισφαίριο σε φέτες παράλληλες προς το επίπεδο xy, πάχους dz η καθεμία. Ας θεωρήσομε την τυχούσα φέτα, που βρίσκεται σε ύψος z, δηλαδή η μια βάση της είναι στο z και η άλλη στο $z + dz$. Το εμβαδόν της βάσης της φέτας είναι $S = \pi r^2 = \pi (R^2 - z^2)$, όγκος της φέτας είναι $dV = S\, dz = \pi (R^2 - z^2) dz$ και η μάζα της είναι $dm = \rho\, dV = \rho \pi (R^2 - z^2) dz$. Συνεπώς έχομε για τη συντεταγμένη Z

$$Z = \frac{\int_o^R \rho \pi (R^2 - z^2) dz\, z}{M} = \frac{3}{8} R$$

<u>Παρατήρηση 1</u>: Λόγω του σχήματος του ημισφαιρίου περιμέναμε το Z να είναι μικρότερο από $R/2$ και όντως είναι.
<u>Παρατήρηση 2</u>: Αυτό που κάναμε εδώ είναι η γενίκευση της ιδιότητας 5 για το κέντρο μάζας. Αντί για δυο μέρη έχομε άπειρα.

Παράδειγμα 4.2: Να βρεθεί το κέντρο μάζας ομογενούς κώνου μάζας M, βάσης κυκλικής με ακτίνα R και ύψους H.

Λύση: Ο όγκος του κώνου είναι $V = \dfrac{1}{3} \pi R^2 H$ (δηλαδή 1/3 βάση x ύψος) και η πυκνότητά του είναι

$$\rho = \frac{M}{(1/3)\pi R^2 H}.$$

Ας θεωρήσομε ότι ο άξονας z είναι ο άξονας συμμετρίας του κώνου και ότι η βάση του είναι στο επίπεδο xy. Άρα, το κέντρο μάζας του βρίσκεται στον άξονα z (ιδιότητα 2 του κέντρου μάζας) και η συντεταγμένη του Z δίνεται από

$$Z = \frac{\int\limits_{(M)} dm\, z}{M} .$$

Κόβομε τον κώνο σε φέτες παράλληλες προς το επίπεδο xy, πάχους dz η καθεμία. Ας θεωρήσομε την τυχούσα φέτα, που βρίσκεται σε ύψος z, δηλαδή η μια βάση της είναι στο z και η άλλη στο $z + dz$. Το εμβαδόν της βάσης της φέτας είναι $S = \pi r^2 = \pi R^2 \left(\frac{H - z}{H} \right)^2$, διότι από όμοια ορθογώνια τρίγωνα έχομε ότι $\frac{r}{R} = \frac{H - z}{H}$. Ο όγκος της φέτας είναι $dV = S\, dz$ και η μάζα της είναι $dm = \rho\, dV$. Συνεπώς έχομε για τη συντεταγμένη Z

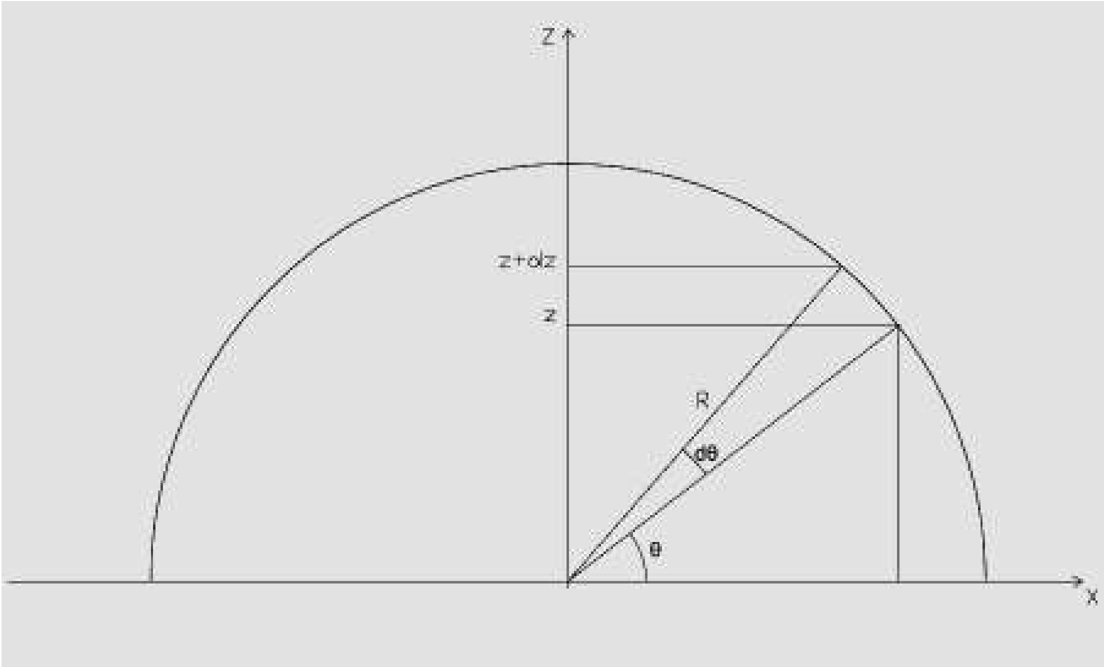
$$Z = \frac{\int\limits_{o}^{H} \rho \pi R^2 \left(\frac{H - z}{H} \right)^2 dz\, z}{M} = \frac{1}{4} H .$$

Παράδειγμα 4.3: Να βρεθεί το κέντρο μάζας ομογενούς ημικυκλικού σύρματος μάζας M και ακτίνας R.

Λύση: Η γραμμική πυκνότητα του σύρματος (δηλαδή η μάζα ανά μονάδα μήκους) είναι $\lambda = \frac{M}{\pi R}$. Ας θεωρήσομε ότι η διάμετρος του ημικυκλίου βρίσκεται στον άξονα x, με το κέντρο τού ημικυκλίου στη θέση $x = 0$ και το ημικύκλιο στο επίπεδο xz. Ο άξονας z είναι συνεπώς άξονας συμμετρίας του ημικυκλίου και άρα το κέντρο μάζας του βρίσκεται στον άξονα z με συντεταγμένη

$$Z = \frac{\int\limits_{(M)} dm\, z}{M} .$$

Θωρούμε δυο ευθείες παράλληλες προς τον άξονα x, στα σημεία z και $z + dz$ του άξονα z, που εκτείνονται προς τα θετικά x. Το μήκος τόξου του ημικυκλίου που βρίσκεται μεταξύ των δυο ευθειών έχει μήκος $ds = Rd\theta$ και μάζα $dm = \lambda ds = \lambda R d\theta$.



Έτσι, η συντεταγμένη Z του κέντρου μάζας είναι

$$Z = \frac{\int_{(M)} dm\, z}{M} = \frac{\int_0^{\pi} \lambda R d\theta\, z}{M} = \frac{\int_0^{\pi} \lambda R d\theta\, R \sin\theta}{M} = \frac{2}{\pi} R \,.$$

Παράδειγμα 4.4: Να βρεθεί το κέντρο μάζας ομογενούς ημισφαιρικής επιφάνειας μάζας M και ακτίνας R.

Λύση: Η επιφανειακή πυκνότητα της ημισφαιρικής επιφάνειας (δηλαδή η μάζα ανά μονάδα επιφάνειας) είναι $\sigma = \dfrac{M}{2\pi R^2}$. Ας θεωρήσομε ότι ο άξονας z είναι ο άξονας συμμετρίας της ημισφαιρικής επιφάνειας και ότι η κυκλική βάση της είναι στο επίπεδο xy, με το κέντρο της στην αρχή των αξόνων. Άρα, το κέντρο μάζας της βρίσκεται στον άξονα z (ιδιότητα 2 του κέντρου μάζας) και η συντεταγμένη της Z δίνεται από

$$Z = \frac{\int_{(M)} dm\, z}{M} \,.$$

Αν το σχήμα του Παραδείγματος 4.3 το περιστρέψομε περί τον άξονα z, το ημικύκλιο γίνεται ημισφαιρική επιφάνεια και οι οριζόντιες ευθείες γίνονται οριζόντιοι κύκλοι. Η ακτίνα του κάτω κύκλου είναι $r = R\cos\theta$ και είναι ίση με το x του σχήματος του Παραδείγματος 4.3. Το εμβαδόν της ημισφαιρικής επιφάνειας που βρίσκεται μεταξύ των δυο κύκλων είναι $dS = 2\pi\, r\, R d\theta = 2\pi\, R\cos\theta\, R d\theta$ (διότι είναι λωρίδα μήκους $2\pi\, r = 2\pi\, R\cos\theta$ και πλάτους $R d\theta$) και η μάζα της είναι $dm = \sigma\, dS = \sigma 2\pi\, R\cos\theta\, R d\theta$. Έτσι, η συντεταγμένη του κέντρου μάζας είναι

$$Z = \frac{\int\limits_{(M)} dm\, z}{M} = \frac{\int\limits_0^{\pi/2} \sigma 2\pi R \cos\theta\, R d\theta\, z}{M} = \frac{\int\limits_0^{\pi/2} \sigma 2\pi R \cos\theta\, R d\theta\, R\sin\theta}{M} = \frac{1}{2}R\,.$$

Παράδειγμα 4.5: Στο επίπεδο xz θεωρήστε κυκλική επιφάνεια μάζας M και ακτίνας R με κέντρο το σημείο $(R,0)$. Από αυτή την επιφάνεια αφαιρέστε επιφάνεια κύκλου ακτίνας $a \le R/2$ με το κέντρο της στο σημείο $(3R/2,0)$. Να βρεθεί το κέντρο μάζας της εναπομείνασας επιφάνειας.

Λύση: Η <u>επιφανειακή πυκνότητα</u> της αρχικής κυκλικής επιφάνειας είναι $\sigma = \dfrac{M}{\pi R^2}$.

Έτσι, η μάζα που αφαιρείται είναι $m_1 = \sigma\pi a^2$ και η μάζα που απομένει είναι $m_2 = \sigma\pi(R^2 - a^2)$. Το κέντρο μάζας της επιφάνειας που αφαιρέθηκε είναι στον άξονα x και έχει συντεταγμένη $x_1 = 3R/2$ ενώ το κέντρο μάζας της εναπομείνασας επιφάνειας είναι στον άξονα x και έχει συντεταγμένη x_2, που είναι ζητούμενη. Τέλος, το κέντρο μάζας της αρχικής επιφάνειας είναι στον άξονα x και έχει συντεταγμένη $X = R$. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα 5 του κέντρου μάζας γράφομε

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

ή

$$R = \frac{\sigma\pi a^2 x_1 + \sigma\pi(R^2 - a^2)x_2}{\sigma\pi R^2}\,.$$

Λύνοντας ως προς x_2 έχομε $x_2 = \left(\dfrac{R^2 - 3a^2/2}{R^2 - a^2}\right)R$.

Άσκηση 4.2: Να βρεθεί το κέντρο μάζας ομογενούς πυραμίδας μάζας M, ύψους H και βάσης τετράγωνης με πλευρά a.

Απάντηση: Έστω ότι ο άξονας συμμετρίας είναι ο z. Τότε $Z = H/4$. Η βάση της πυραμίδας είναι στο $z = 0$.

Άσκηση 4.3: Να βρεθεί το κέντρο μάζας ομογενούς ημικυκλικής επιφάνειας μάζας M και ακτίνας R.

Απάντηση: Έστω ότι ο άξονας συμμετρίας είναι ο z. Τότε $Z = (4/3\pi)R$. Το κέντρο του κύκλου είναι στο $z = 0$.

Άσκηση 4.4: Να βρεθεί το κέντρο μάζας ομογενούς συρμάτινου τεταρτοκυκλίου μάζας M και ακτίνας R.

Απάντηση: Έστω ότι ο άξονας συμμετρίας είναι ο z. Τότε $Z = (2\sqrt{2}/\pi)R$. Το κέντρο του κύκλου είναι στο $z = 0$.

Άσκηση 4.5: Θεωρήστε ομογενή σφαίρα μάζας M και ακτίνας R με κέντρο το σημείο $(R,0,0)$. Από αυτή τη σφαίρα αφαιρέστε σφαίρα ακτίνας $a \le R/2$ με το κέντρο της στο σημείο $(3R/2,0,0)$. Να βρεθεί το κέντρο μάζας της εναπομείνασας μάζας.

Απάντηση: Κατ' αναλογία προς το Παράδειγμα 4.5, $x_2 = \left(\dfrac{R^3 - 3a^3/2}{R^3 - a^3}\right)R$.

Άσκηση 4.6 (Θεώρημα 1 του Πάππου του Αλεξανδρινού, 290 – 350 μ.Χ.): Θεωρήστε ομογενές επίπεδο σύρμα μάζας M και μήκους L. Περιστρέψτε το σύρμα περί έναν άξονα που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με το σύρμα. Δείξτε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας που διαγράφει το σύρμα με την περιστροφή του ισούται με το μήκος του σύρματος επί το μήκος του τόξου που διαγράφει το κέντρο μάζας του σύρματος κατά την περιστροφή.
Υπόδειξη: α) Γράψτε με ολοκλήρωμα το εμβαδόν της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή. β) Υπολογίστε τη συντεταγμένη του κέντρου μάζας του σύρματος στον άξονα z αν η περιστροφή είναι να γίνει περί τον άξονα x.

Απάντηση: Έστω περιστροφή κατά γωνία θ. Εμβαδόν $= L\theta \dfrac{1}{M}\int_0^M z\,dm$.

Άσκηση 4.7: Χρησιμοποιώντας τα Θεώρημα 1 του Πάππου να βρείτε το κέντρο μάζας ομογενούς ημικυκλικού σύρματος μάζας M και ακτίνας R.

Απάντηση: Έστω ότι ο άξονας συμμετρίας είναι ο z. Τότε $Z = (2/\pi)R$. Το κέντρο του κύκλου είναι στο $z = 0$.

Άσκηση 4.8 (Θεώρημα 2 του Πάππου του Αλεξανδρινού, 290 – 350 μ.Χ.): Θεωρήστε ομογενή επίπεδη επιφάνεια μάζας M και εμβαδού A. Περιστρέψτε την επιφάνεια περί έναν άξονα που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με την επιφάνεια. Δείξτε ότι ο όγκος που διαγράφει η επιφάνεια με την περιστροφή της ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας επί το μήκος του τόξου που διαγράφει το κέντρο μάζας της επιφάνειας κατά την περιστροφή.

Απάντηση: Έστω περιστροφή κατά γωνία θ. Όγκος $= A\theta \dfrac{1}{M}\int_0^M z\,dm$.

Άσκηση 4.9: Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2 του Πάππου να βρείτε το κέντρο μάζας ομογενούς ημικυκλικής επιφάνειας μάζας M και ακτίνας R.

Απάντηση: Έστω ότι ο άξονας συμμετρίας είναι ο z. Τότε $Z = (4/3\pi)R$. Το κέντρο του κύκλου είναι στο $z = 0$.