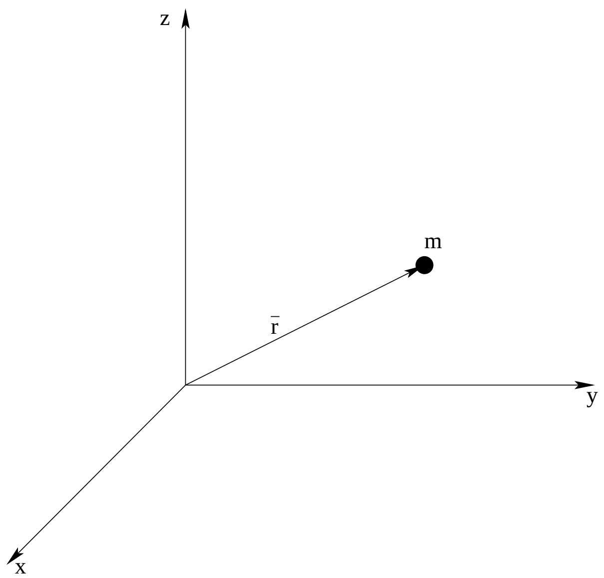
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Διατηρητικές δυνάμεις

Στο υποκεφάλαιο 1.4 είδαμε ότι, για μονοδιάστατες κινήσεις στον άξονα x, <u>όλες</u> οι δυνάμεις της μορφής $F = F(x)$ είναι διατηρητικές. Για κίνηση λοιπόν στις τρεις διαστάσεις, μπορούμε να πούμε ότι <u>όλες</u> οι δυνάμεις της μορφής $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$ είναι διατηρητικές; Με άλλα λόγια, μπορούμε να γράψομε τον νόμο διατήρησης της ενέργειας για <u>όλες</u> τις δυνάμεις της μορφής $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$; Θα το εξετάσομε χρησιμοποιώντας τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα.

Ας θεωρήσομε υλικό σημείο μάζας m που κινείται στον χώρο υπό την επίδραση της γενικής δύναμης $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$, όπου $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ είναι η <u>στιγμιαία</u> θέση του υλικού σημείου. Συγκεκριμένα παραδείγματα θα δούμε πιο κάτω.



Ας θεωρήσομε ότι την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$, το υλικό σημείο ήταν στη θέση $\vec{r}_0 = x_0\,\hat{i} + y_0\,\hat{j} + z_0\,\hat{k}$ και είχε ταχύτητα $\vec{u}_0$. Βάσει του Δεύτερου Νόμου του Νεύτωνα γράφομε

$$m\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} \; . \tag{3.1}$$

Πολλαπλασιάζομε (δηλαδή εσωτερικό γινόμενο) αμφότερα τα μέλη της (3.1) με την ταχύτητα $\vec{u}$ και έχομε

$$m\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{u} = \vec{F}\cdot\vec{u} \; . \tag{3.2}$$

Η εξίσωση (3.2) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mu^2\right) = \vec{F}\cdot\vec{u}\ , \tag{3.3}$$

διότι

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m\vec{u}\cdot\vec{u} \qquad \text{και} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{u}\cdot\vec{u}\right) = m\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{u}\ .$$

Η ποσότητα $T = \frac{1}{2}mu^2$ λέγεται *κινητική ενέργεια* του υλικού σημείου και η εξίσωση (3.3) γράφεται ως

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{u}\ , \tag{3.4}$$

όπου η ποσότητα $\vec{F}\cdot\vec{u}$ λέγεται *ισχύς* της δύναμης. Χωρίς λοιπόν να το καταλάβομε, <u>αποδείξαμε</u> το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 3.1: Για δυνάμεις της μορφής $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, η χρονική μεταβολή της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου πάνω στο οποίο ασκείται η δύναμη ισούται με την ισχύ της δύναμης.

Πολλαπλασιάζομε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης (3.4) με dt και έχομε

$$\frac{dT}{dt}dt = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt\ , \tag{3.5}$$

η οποία γράφεται ως

$$dT = \vec{F}\cdot d\vec{r}\ . \tag{3.6}$$

Πάλι χωρίς να το καταλάβομε, <u>αποδείξαμε</u> το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 3.2: Για δυνάμεις της μορφής $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου πάνω στο οποίο ασκείται η δύναμη ισούται με το έργο της δύναμης κατά τη μετατόπιση του υλικού σημείου.

Αν και δεν είναι απαραίτητο, την εξίσωση (3.6) τη γράφομε ως εξής:

$$d\left(\frac{1}{2}mu^2\right) = \vec{F}\cdot d\vec{r}\ . \tag{3.7}$$

Παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές είναι χωρισμένες, δηλαδή αριστερά έχομε ταχύτητα και δεξιά θέση. Άρα μπορούμε να ολοκληρώσομε κατά μέλη. Ολοκληρώνομε λοιπόν το αριστερό μέλος από την αρχική ταχύτητα $\vec{u}_0$ μέχρι την τυχούσα ταχύτητα $\vec{u}$ και το δεξιό από την αρχική θέση $\vec{r}_0$ μέχρι την τυχούσα θέση $\vec{r}$. Έτσι έχομε

$$\int_{u_0}^{u} d\left(\frac{1}{2}mu^2\right) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \,, \tag{3.8}$$

ή

$$\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}mu_0^2 = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \,, \tag{3.9}$$

την οποία γράφομε ως εξής:

$$\frac{1}{2}mu^2 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mu_0^2 = \text{σταθερά}, \tag{3.10}$$

διότι οι ποσότητες $1/2$, m, u_0 είναι σταθερές. Τίθεται λοιπόν τώρα το ερώτημα: Μπορούμε να ορίσομε την ποσότητα

$$-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{3.11}$$

ως τη δυναμική ενέργεια

$$V(\vec{r}) \tag{3.12}$$

του υλικού σημείου στη θέση $\vec{r}$; Αν ναι, τότε η εξίσωση (3.10) θα ήταν ο νόμος διατήρησης της ενέργειας και <u>όλες</u> οι δυνάμεις $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ θα ήταν διατηρητικές. Όμως, αυτό δεν ισχύει.

Η δυναμική ενέργεια $V(\vec{r}) = V(x, y, z)$, ως συνάρτηση των μεταβλητών x, y, z, είναι <u>μονοσήμαντη</u>. Δηλαδή, για κάθε τριάδα αριθμών x, y, z μάς δίνει <u>μια</u> τιμή, την τιμή της δυναμικής ενέργειας σ' αυτή τη θέση. Η σχέση (3.11) μάς δίνει το μείον έργο που κάνει η δύναμη για μετακίνηση από το σημείο $\vec{r}_0$ στο σημείο $\vec{r}$. Αν αυτό το έργο εξαρτάται από τον δρόμο που ακολουθήθηκε, τότε για διαφορετικούς δρόμους θα έχομε διαφορετικά έργα, δηλαδή η συνάρτηση (3.11) είναι <u>πολυσήμαντη</u>. Δεν μπορούμε επομένως να εξισώσομε μια <u>μονοσήμαντη</u> συνάρτηση, την (3.12), με μια <u>πολυσήμαντη</u> συνάρτηση, την (3.11). Μπορούμε να εξισώσομε την (3.11) με την (3.12) <u>μόνο</u> αν η (3.11) είναι κι αυτή μονοσήμαντη συνάρτηση του $\vec{r}$, δηλαδή αν το έργο της δύναμης μεταξύ των σημείων $\vec{r}_0$ και $\vec{r}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου μεταξύ των δυο αυτών σημείων.

Οι δυνάμεις $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ για τις οποίες το έργο μεταξύ δυο τυχόντων σημείων είναι ανεξάρτητο του δρόμου λέγονται *διατηρητικές* ή *αστρόβιλες* και γι' αυτές και μόνο γι' αυτές μπορούμε να ορίσομε τη δυναμική ενέργεια στο σημείο $\vec{r}$ με τη σχέση

$$V(\vec{r}) \equiv -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \,. \tag{3.13}$$

Για διατηρητικές δυνάμεις $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ μπορούμε λοιπόν να γράψομε από τη σχέση (3.10) ότι

$$T + V = \text{σταθερά} = E \tag{3.14}$$

όπου E είναι η ολική ενέργεια. Έτσι αποδείξαμε το *θεώρημα διατήρησης της ενέργειας* για διατηρητικές δυνάμεις της μορφής $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$.

Θεώρημα 3.3: Για διατηρητικές δυνάμεις της μορφής $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας του υλικού σημείου είναι σταθερό κατά την κίνησή του.

Από τον ορισμό που δώσαμε για την δυναμική ενέργεια, είναι προφανές ότι αυτή μηδενίζεται στην αρχική θέση $\vec{r}_0$ διότι

$$V(\vec{r}_0) \equiv -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \,. \tag{3.15}$$

Ας υποθέσομε ότι δεν θέλομε η δυναμική ενέργεια να μηδενίζεται στην αρχική θέση $\vec{r}_0$, αλλά σε κάποια άλλη θέση $\vec{r}_1$. Τότε γράφομε την εξίσωση (3.10) ως εξής:

$$\frac{1}{2}mu^2 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mu_0^2 \tag{3.16}$$

ή

$$\frac{1}{2}mu^2 - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}} F(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mu_0^2 + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \text{σταθερά.} \tag{3.17}$$

Το δεξιό μέλος της (3.17) είναι σταθερό διότι το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης είναι αριθμός.

Αν τώρα ορίσομε τη δυναμική ενέργεια ως

$$V(\vec{r}) \equiv -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{3.18}$$

και την ολική ενέργεια ως

$$E=\frac{1}{2}mu_0^2+\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\text{σταθερά} \tag{3.19}$$

πάλι μπορούμε να γράψομε

$$T+V=\text{σταθερά}=E, \tag{3.20}$$

μόνο που τώρα και το E και το V έχουν διαφορετικές τιμές από πριν. Και από τον ορισμό (3.13) και από τον ορισμό (3.18) έχομε ότι

$$\vec{F}(\vec{r})=-\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}\hat{i}-\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}\hat{j}-\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}\hat{k}\equiv-\nabla V(x,y,z), \tag{3.21}$$

όπου το σύμβολο $\partial/\partial x$ σημαίνει *μερική παράγωγος* ως προς x και ομοίως για τα $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$.

Με άλλα λόγια, η δυναμική ενέργεια είναι το μείον έργο της δύναμης και η δύναμη είναι το μείον ανάδελτα της δυναμικής ενέργειας.

Παρατήρηση: Όπως είδαμε παραπάνω, το μηδέν της δυναμικής ενέργειας μπορούμε να το βάλομε όπου θέλομε και ο νόμος διατήρησης της ενέργειας ισχύει. Οι τιμές της δυναμικής ενέργειας και της ολικής ενέργειας αλλάζουν ανάλογα με το που βάλαμε το μηδέν της δυναμικής ενέργειας.

3.1 Κεντρικές δυνάμεις

Η πιο σημαντική κατηγορία διατηρητικών δυνάμεων είναι οι *κεντρικές δυνάμεις*, που ορίζονται ως

$$\vec{F}=f(r)\hat{r}, \tag{3.22}$$

όπου $\hat{r}=\vec{r}/|\vec{r}|=\vec{r}/r$ είναι το ακτινικό μοναδιαίο διάνυσμα. Είναι δηλαδή ακτινικές δυνάμεις. Όλες οι θεμελιώδεις δυνάμεις της Φύσης είναι κεντρικές (βλ. Ασκήσεις 3.3 κα 3.5).

Θεώρημα 3.4: Όλες οι κεντρικές δυνάμεις είναι διατηρητικές.

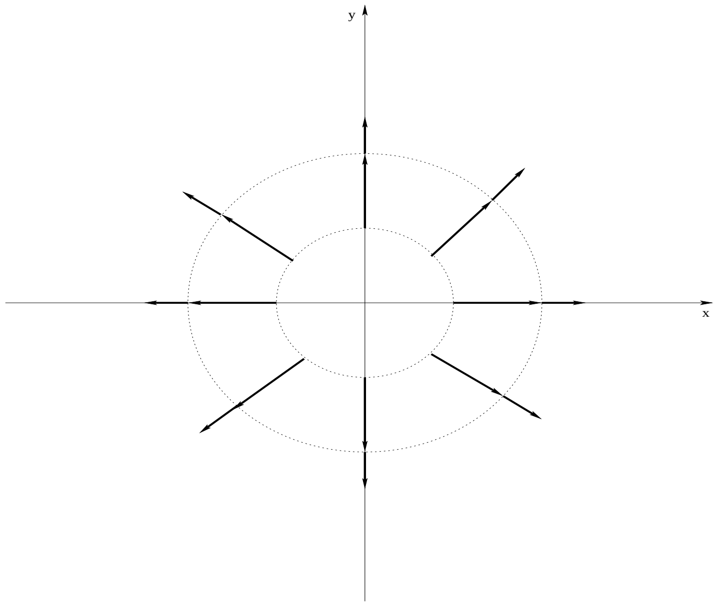
Απόδειξη: Αρκεί να δείξομε ότι το έργο που κάνουν οι κεντρικές δυνάμεις μεταξύ δυο τυχόντων σημείων $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου που ακολουθούμε. Το έργο αυτό είναι

$$W=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}f(r)\hat{r}\cdot d\vec{r}=\int_{r_1}^{r_2}f(r)\,dr=\text{ανεξάρτητο του δρόμου}, \tag{3.23}$$

όπου $dr=\hat{r}\cdot d\vec{r}$ είναι ακτινική μετατόπιση, δηλαδή είναι η προβολή της μετατόπισης $d\vec{r}$ στο ακτινικό διάνυσμα $\hat{r}$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι το έργο της δύναμης (3.22) από το τυχόν σημείο $\vec{r}_1$ στο τυχόν σημείο $\vec{r}_2$ είναι ίσο με το έργο που κάνει η δύναμη για <u>ακτινική</u> μετακίνηση από την επιφάνεια της σφαίρας με ακτίνα r_1 στην επιφάνεια της σφαίρας με ακτίνα r_2 <u>ανεξαρτήτως της πορείας που ακολουθήσαμε</u>.

Παράδειγμα 3.1: Να σχεδιασθεί το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}(\vec{r}) = F_0 \frac{R}{r}\hat{r}$, όπου $F_0 = 1$ Nt, $R = 1$ m είναι σταθερές, r είναι η ακτινική απόσταση και $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}| = \vec{r}/r$ είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα. Με άλλα λόγια, να σχεδιασθεί το διάνυσμα της δύναμης $\vec{F}$ σε διάφορες θέσεις. Χάριν ευκολίας περιοριστείτε σε σημεία του επιπέδου xy. Να διερευνήσετε αν το πεδίο δυνάμεων είναι διατηρητικό ή όχι. Από το σχήμα και μόνο θα μπορούσατε να βγάλετε το συμπέρασμα αυτό;

<u>Λύση</u>: Σε κάθε σημείο η δύναμη είναι <u>ακτινική</u>. Για $r = 1$ m, το μέτρο της δύναμης είναι 1 Nt. Για $r = 2$ m, το μέτρο της δύναμης είναι 1/2 Nt. Για $r = 3$ m, το μέτρο της δύναμης είναι 1/3 Nt και ούτω καθ' εξής. Έτσι λοιπόν έχομε



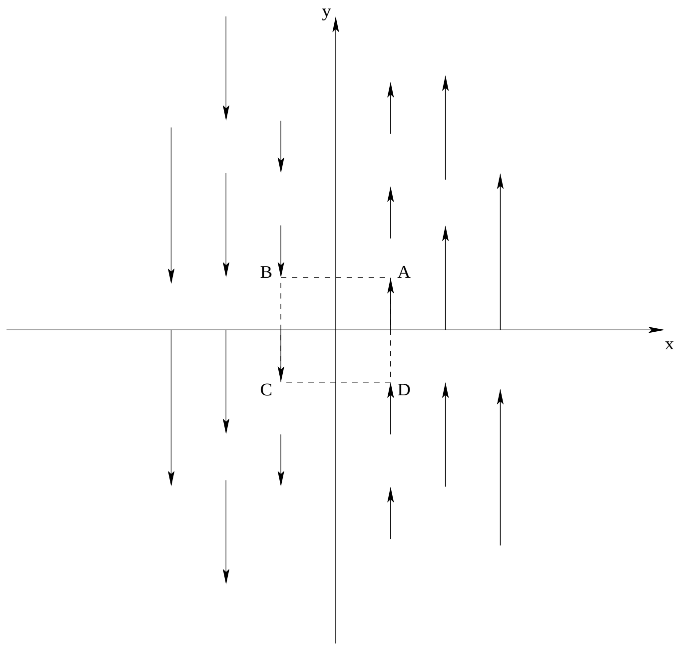
Το πεδίο δυνάμεων είναι διατηρητικό ή αστρόβιλο διότι είναι κεντρικό.

Το ίδιο συμπέρασμα βγάζομε και από το σχήμα αφού το πεδίο δυνάμεων δεν "στροβιλίζει", δηλαδή δεν θα μας "έστριβε" αν πέφταμε μέσα σ' αυτό.

Παράδειγμα 3.2: Να σχεδιασθεί το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}(\vec{r}) = (F_0 x / x_0)\hat{j}$, όπου $F_0 = 1$ Nt, $x_0 = 1$ m είναι σταθερές και $\hat{j}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα y. Με άλλα λόγια, να σχεδιασθεί το διάνυσμα της δύναμης $\vec{F}$ σε διάφορες θέσεις. Χάριν ευκολίας περιοριστείτε σε σημεία του επιπέδου xy. Παρατηρείστε ότι αυτό το πεδίο δυνάμεων δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες y και z, αλλά μόνο από τη συντεταγμένη x.

A) Να διερευνήσετε αν αυτό το πεδίο δυνάμεων είναι διατηρητικό ή όχι. Από το σχήμα και μόνο θα μπορούσατε να βγάλετε το συμπέρασμα αυτό;
B) Να υπολογίσετε το έργο που κάνει το πεδίο δυνάμεων στην κλειστή διαδρομή $(1, 1) \rightarrow (-1, 1) \rightarrow (-1, -1) \rightarrow (1, -1) \rightarrow (1, 1)$ του επιπέδου xy.

<u>Λύση</u>: Για όλα τα σημεία $(1, y)$, η δύναμη είναι $+1$. Για όλα τα σημεία $(2, y)$, η δύναμη είναι $+2$ κλπ. Για όλα τα σημεία $(-1, y)$, η δύναμη είναι -1 κλπ. Έτσι έχομε



A) Το πεδίο δυνάμεων <u>δεν είναι</u> διατηρητικό διότι, όπως θα αποδείξομε στο ερώτημα B, το έργο της δύναμης σε μια κλειστή γραμμή δεν είναι ίσο με το μηδέν.

Το ίδιο συμπέρασμα βγάζομε και από το σχήμα αφού το πεδίο δυνάμεων "στροβιλίζει", δηλαδή ένα σώμα πεπερασμένων διαστάσεων θα το "στρίψει" κατά φορά αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου αν πέσει μέσα.

B) Τα επιμέρους έργα είναι: $W_{AB} = 0$, διότι η δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση. $W_{BC} = 1 \times 2 = 2$ Joule, διότι η δύναμη είναι σταθερή και συγγραμμική με τη μετατόπιση. $W_{CD} = 0$ και $W_{DA} = 2$ Joule. Συνεπώς το συνολικό έργο είναι
$W = 4$ Joule $\neq 0$.

<u>Παρατήρηση</u>: Δεν πρέπει να σχηματιστεί η εντύπωση ότι <u>μόνο</u> τα κεντρικά πεδία δυνάμεων είναι διατηρητικά. Όπως είδαμε στην εξίσωση (3.21), μπορούμε να γράψομε <u>άπειρα</u> διατηρητικά πεδία θεωρώντας <u>τυχαίες</u> συναρτήσεις δυναμικής ενέργειας $V(x, y, z)$. Για τα πεδία αυτά δεν χρειάζεται να βρούμε τη δυναμική ενέργεια με την εξίσωση (3.13) διότι την ξέρομε ήδη. Από αυτήν φτιάξαμε το πεδίο.

Άσκηση 3.1: Να σχεδιασθεί το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}(\vec{r}) = -k\,r\,\hat{r}$, όπου $k = 1$ Nt/m είναι σταθερά, r είναι η ακτινική απόσταση και $\hat{r} = \vec{r}\,/|\vec{r}| = \vec{r}\,/\,r$ είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα. Με άλλα λόγια, να σχεδιασθεί το διάνυσμα της δύναμης $\vec{F}$ σε διάφορες θέσεις. Χάριν ευκολίας περιοριστείτε σε σημεία του επιπέδου xy.
A) Να διερευνήσετε αν το πεδίο δυνάμεων είναι διατηρητικό ή όχι. <u>Από το σχήμα και μόνο</u> θα μπορούσατε να βγάλετε το συμπέρασμα αυτό;
B) Να βρεθεί το έργο που παράγει το πεδίο δυνάμεων κατά τη μετακίνηση από το σημείο (0, 0, 0) στο σημείο (1, 1, 1).

Απάντηση: B) Η μετακίνηση γίνεται από $r = 0$ μέχρι $r = \sqrt{3}$ m. Συνεπώς $W = -3/2$ J.

Άσκηση 3.2: Να σχεδιασθεί το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}(\vec{r}) = -(F_0 y / y_0)\hat{i}$, όπου $F_0 = 1$ Nt, $y_0 = 1$ m είναι σταθερές και $\hat{i}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα x. Με άλλα λόγια, να σχεδιασθεί το διάνυσμα της δύναμης $\vec{F}$ σε διάφορες θέσεις. Χάριν ευκολίας περιοριστείτε σε σημεία του επιπέδου xy. Παρατηρήστε ότι αυτό το πεδίο δυνάμεων δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες x και z, αλλά μόνο από τη συντεταγμένη y.
A) Να διερευνήσετε αν αυτό το πεδίο δυνάμεων είναι διατηρητικό ή όχι. <u>Από το σχήμα και μόνο</u> θα μπορούσατε να βγάλετε το συμπέρασμα αυτό;
B) Να υπολογίσετε το έργο που κάνει το πεδίο δυνάμεων στην κλειστή διαδρομή $(1,1) \to (-1,1) \to (-1,-1) \to (1,-1) \to (1,1)$ του επιπέδου xy.

Απάντηση: B) $W = 4$ J.

Άσκηση 3.3: Να σχεδιασθεί το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}(\vec{r}) = -G\dfrac{Mm}{r^2}\hat{r}$, που περιγράφει την <u>έλξη</u> της Σελήνης (σημειακή μάζα m) από τη Γη (σημειακή μάζα M), θεωρώντας ότι η Γη είναι ακίνητη στην αρχή των αξόνων. Χάριν ευκολίας, μπορείτε να θεωρήσετε ότι το γινόμενο GMm είναι ίσο με τη μονάδα. Στον τύπο, r είναι η ακτινική απόσταση της Σελήνης από τη Γη, $\hat{r} = \vec{r}\,/\,r$ είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα και το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η Γη <u>έλκει</u> τη Σελήνη. Με άλλα λόγια, να σχεδιασθεί το διάνυσμα της δύναμης $\vec{F}$ σε διάφορες θέσεις. Χάριν ευκολίας περιοριστείτε σε σημεία του επιπέδου xy.
A) <u>Από το σχήμα και μόνο</u> μπορείτε να αποφανθείτε αν το πεδίο δυνάμεων είναι διατηρητικό ή όχι;
B) Να βρεθεί το έργο που παράγει το πεδίο δυνάμεων κατά τη μετακίνηση από το σημείο (0, 0, 1) στο σημείο (2, 0, 0).

Απάντηση: B) Η μετακίνηση γίνεται από $r = 1$ m μέχρι $r = 2$ m. Συνεπώς $W = -1/2$ J.

Άσκηση 3.4: Να σχεδιασθεί το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}(\vec{r}) = (F_0 x^2 / x_0^2)\,\hat{j}$, όπου $F_0 = 1$ Nt, $x_0 = 1$ m είναι σταθερές και $\hat{j}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα y. Με άλλα λόγια, να σχεδιασθεί το διάνυσμα της δύναμης $\vec{F}$ σε διάφορες θέσεις. Χάριν ευκολίας περιοριστείτε σε σημεία του επιπέδου xy. Παρατηρείστε ότι αυτό το πεδίο δυνάμεων δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες y και z, αλλά μόνο από τη συντεταγμένη x.
Α) Να διερευνήσετε αν αυτό το πεδίο δυνάμεων είναι διατηρητικό ή όχι. <u>Από το σχήμα και μόνο</u> θα μπορούσατε να βγάλετε το συμπέρασμα αυτό;
Β) Να υπολογίσετε το έργο που κάνει το πεδίο δυνάμεων στην κλειστή διαδρομή $(3,\,3) \to (-3,\,3) \to (-3,\,-3) \to (3,\,-3) \to (3,\,3)$ του επιπέδου xy.
Γ) Σχολιάστε το αποτέλεσμα που βρήκατε.

Απάντηση: Β) $W = 0$.

Άσκηση 3.5: Να σχεδιασθεί το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}(\vec{r}) = k\dfrac{Qq}{r^2}\hat{r}$, που περιγράφει την <u>άπωση</u> σημειακού φορτίου q από το <u>ομόσημο</u> φορτίο Q, που είναι ακίνητο στην αρχή των αξόνων. Χάριν ευκολίας, μπορείτε να θεωρήσετε ότι το γινόμενο kQq είναι ίσο με τη μονάδα. Στην έκφραση του πεδίου δυνάμεων, r είναι η ακτινική απόσταση του φορτίου q και $\hat{r} = \vec{r}/r$ είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα. Με άλλα λόγια, να σχεδιασθεί το διάνυσμα της δύναμης $\vec{F}$ σε διάφορες θέσεις. Χάριν ευκολίας περιοριστείτε σε σημεία του επιπέδου xy.
Α) <u>Από το σχήμα και μόνο</u> μπορείτε να αποφανθείτε αν το πεδίο δυνάμεων είναι διατηρητικό ή όχι;
Β) Να βρεθεί το έργο που παράγει το πεδίο δυνάμεων κατά τη μετακίνηση από το σημείο (1, 2, 3) στο σημείο (3, 2, 1).

Απάντηση: Β) Η μετακίνηση γίνεται από $r = \sqrt{14}$ m μέχρι $r = \sqrt{14}$ m. Συνεπώς $W = 0$.