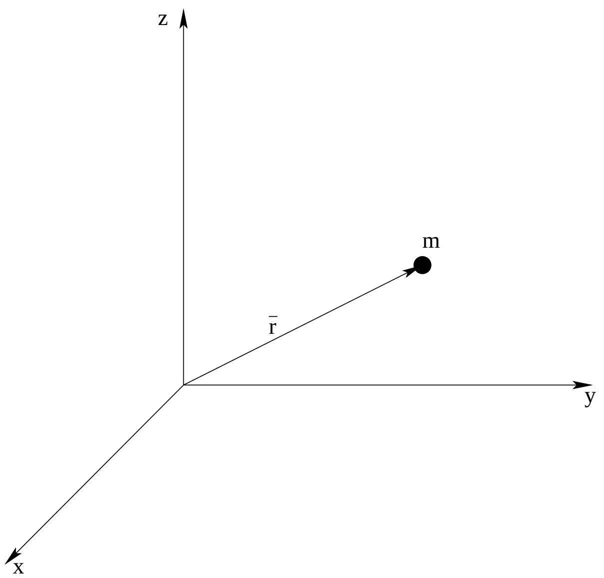
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Τρισδιάστατες κινήσεις

Οι μονοδιάστατες κινήσεις είναι εύκολες, αλλά ζούμε σε τρισδιάστατο χώρο. Θα δούμε λοιπόν τώρα πως θα αντιμετωπίζομε την κίνηση υλικού σημείου στις τρεις διαστάσεις.

Ας θεωρήσομε τρισδιάστατο ορθογώνιο σύστημα αξόνων x, y, z και υλικό σημείο μάζας m στην <u>τυχούσα</u> θέση που έχει συντεταγμένες x, y, z.



Ορίζομε το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ του υλικού σημείου ως

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \qquad (2.1)$$

όπου $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ είναι τα *μοναδιαία* διανύσματα των αξόνων x, y, z αντιστοίχως. Αν το υλικό σημείο κινείται, οι συντεταγμένες x, y, z είναι συναρτήσεις του χρόνου. Επειδή οι άξονες x, y, z είναι σταθεροί, τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ είναι σταθερά. Έτσι, αν παραγωγίσομε την εξίσωση (2.1) για να πάρομε την ταχύτητα του υλικού σημείου, θα έχομε

$$\vec{u}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{k}. \qquad (2.2)$$

Αν στο υλικό σημείο ασκείται δύναμη $\vec{F}$, ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα μας λέει

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad ή \quad m\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} \quad ή \quad m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}, \qquad (2.3)$$

όπου $\vec{a}$ είναι η επιτάχυνση του υλικού σημείου. Η δύναμη $\vec{F}$ μπορεί να εξαρτάται από τον χρόνο, τη θέση, την ταχύτητα κλπ.

Αντικαθιστώντας την (2.1) στην τελευταία από τις σχέσεις (2.3) και λαμβάνοντας υπόψη ότι το διάνυσμα της δύναμης έχει τρεις συνιστώσες, ας πούμε F_x, F_y, F_z, έχομε

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + m\frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + m\frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \tag{2.4}$$

ή

$$\left(m\frac{d^2x}{dt^2} - F_x\right)\hat{i} + \left(m\frac{d^2y}{dt^2} - F_y\right)\hat{j} + \left(m\frac{d^2z}{dt^2} - F_z\right)\hat{k} = 0\,. \tag{2.5}$$

Για να ισχύει η εξίσωση αυτή <u>πάντοτε</u>, πρέπει να έχομε

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} - F_x = 0 \qquad &\text{ή} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} - F_y = 0 \qquad &\text{ή} \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} - F_z = 0 \qquad &\text{ή} \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.1 Ανεξαρτησία των κινήσεων

Εκ πρώτης όψεως, <u>φαίνεται</u> ότι το πρόβλημα της τρισδιάστατης κίνησης υλικού σημείου είναι ισοδύναμο με τρεις μονοδιάστατες κινήσεις. Αυτό όμως είναι σωστό αν η συνιστώσα F_x εξαρτάται μόνο από τα t, x, u_x και όχι από τα y, z, u_y, u_z. Ομοίως για τα F_y και F_z. Σε τέτοια περίπτωση λέμε ότι έχομε *ανεξαρτησία των κινήσεων.* Έτσι, για τη δύναμη $\vec{F} = ax^2\hat{i} + by^3\hat{j} + c\hat{k}$, όπου a, b, c είναι σταθερές, έχομε ανεξαρτησία των κινήσεων, ενώ για τη δύναμη $\vec{F} = a'x^2y\,\hat{i} + b'xy^3\,\hat{j} + c'xyz\,\hat{k}$, όπου a', b', c' είναι σταθερές, δεν έχομε ανεξαρτησία των κινήσεων, διότι για να βρούμε την κίνηση στον άξονα x πρέπει να ξέρομε την κίνηση στον άξονα y. Σ' αυτή την περίπτωση πρέπει να λύσομε και τις τρεις διαφορικές εξισώσεις ταυτοχρόνως, δηλαδή να τις λύσομε ως σύστημα.

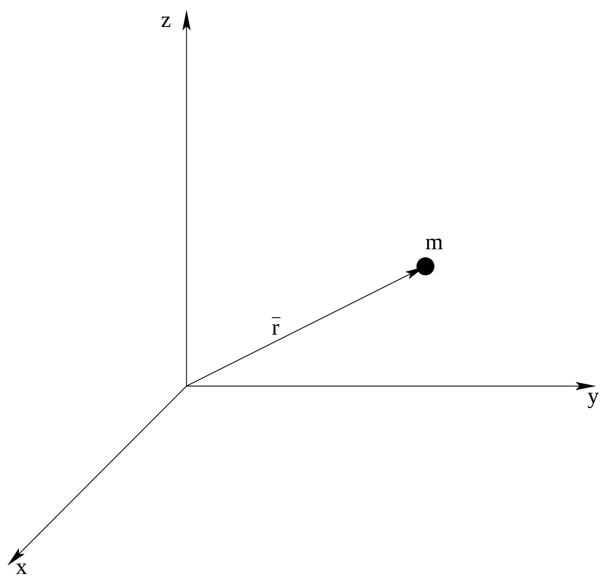
Παράδειγμα 2.1: Υλικό σημείο μάζας m, που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, βάλλεται υπό γωνία $\theta < \pi/2$ ως προς το οριζόντιο επίπεδο με αρχική ταχύτητα $u_0 > 0$. Θεωρείστε ότι το πεδίο βαρύτητας είναι σταθερό με επιτάχυνση g και ότι δεν υπάρχει τριβή αέρα.
Α) Να γραφεί η διανυσματική εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου.

Β) Θεωρώντας ότι η βολή γίνεται στο επίπεδο xz, να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης για τις δυο κινήσεις στους άξονες x και z.

Γ) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του υλικού σημείου για $t > 0$.

Δ) Να δείξετε ότι: 1) τα αποτελέσματά σας ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) <u>όλοι οι όροι</u> στα αποτελέσματά σας έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) στο όριο $t \to \infty$ τα αποτελέσματά σας δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

<u>Λύση</u>:



Α) $$m\frac{d\bar{u}}{dt} = -mg\hat{k}\,,$$

όπου $\bar{u} = \dfrac{d\bar{r}}{dt} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}$. Ας γράψομε και τις αρχικές συνθήκες, παρ' ότι δεν ζητούνται, θεωρώντας ότι η βολή γίνεται στο επίπεδο xz: $\quad \bar{r}(0) = 0 \quad$ και $\bar{u}(0) = u_0(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{k})$.

Β) $$m\frac{du_x}{dt} = 0$$
$$m\frac{du_z}{dt} = -mg$$

Γ) Για την κίνηση στον άξονα x έχομε:

$$\frac{du_x}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_x = c_1\,,$$

όπου c_1 είναι πραγματική σταθερά. Από αυτήν έχομε

$$\frac{dx}{dt} = c_1 \quad \Rightarrow \quad x = c_1 t + c_2 \,,$$

όπου c_2 είναι πραγματική σταθερά. Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες ότι $x(0) = 0$ και $u_x(0) = u_0 \cos\theta$ έχουμε:

$$u_x(t) = u_0 \cos\theta \quad \text{και} \quad x(t) = u_0 \cos\theta\, t \,.$$

Για την κίνηση στον άξονα z έχουμε:

$$\frac{du_z}{dt} = -g \;\Rightarrow\; du_z = -gdt \;\Rightarrow\; \int du_z = -g\int dt + A \;\Rightarrow\; u_z = -gt + A \,,$$

όπου A είναι πραγματική σταθερά. Από αυτήν έχομε

$$\frac{dz}{dt} = -gt + A \;\Rightarrow\; dz = -gtdt + Adt \;\Rightarrow\; \int dz = -g\int tdt + A\int dt + B \,,$$

όπου B είναι πραγματική σταθερά. Τέλος έχομε

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + At + B \,.$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες ότι $u_z(0) = u_0 \sin\theta$ και $z(0) = 0$ έχουμε:

$$u_z(t) = -gt + u_0 \sin\,\theta \,,$$
$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + u_0 \sin\theta\, t \,.$$

Άρα, **η** λύση του δοθέντος προβλήματος είναι

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + z(t)\hat{k} = \left(u_0 \cos\theta\, t)\right)\hat{i} + \left(-\frac{1}{2} g t^2 + u_0 \sin\theta\, t\right)\hat{k} \,.$$

Αυτήν την τροχιά θα ακολουθήσει το υλικό σημείο.

Δ) Παρατηρούμε ότι:

1. Οι αρχικές συνθήκες ικανοποιούνται.
2. Όλοι οι όροι έχουν τις σωστές διαστάσεις.
3. Στον άξονα x η ταχύτητα είναι σταθερή και η θέση αυξάνεται γραμμικά με τον χρόνο, διότι η ασκούμενη δύναμη στο υλικό σημείο <u>δεν έχει</u> x συνιστώσα. Στον άξονα z έχομε ελεύθερη πτώση στο σταθερό πεδίο βαρύτητας με αρχική ταχύτητα προς τα πάνω.

Παράδειγμα 2.2: Υλικό σημείο μάζας m, που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, βάλλεται υπό γωνία $\theta < \pi/2$ ως προς το οριζόντιο επίπεδο με αρχική ταχύτητα

$u_0 > 0$. Η τριβή τού αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας του υλικού σημείου με σταθερά αναλογίας β. Θεωρείστε το πεδίο βαρύτητας σταθερό με επιτάχυνση g.

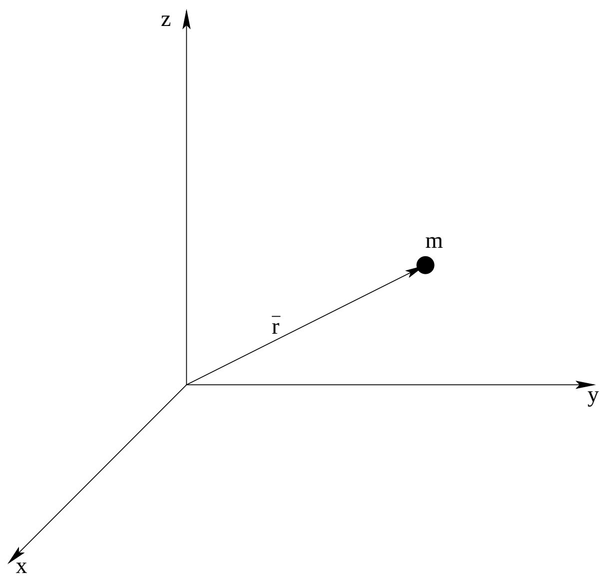
Α) Να γραφεί η διανυσματική εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου.

Β) Θεωρώντας ότι η βολή γίνεται στο επίπεδο yz, να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης για τις δυο κινήσεις στους άξονες y και z.

Γ) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του υλικού σημείου για $t > 0$.

Δ) Να δείξετε ότι: 1) τα αποτελέσματά σας ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) <u>όλοι οι όροι</u> στα αποτελέσματά σας έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) στο όριο $t \to \infty$ τα αποτελέσματά σας δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

<u>Λύση</u>



Α)
$$m\frac{d\vec{u}}{dt} = -mg\hat{k} - \beta\vec{u},$$

όπου $\vec{u} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$. Ας γράψομε και τις αρχικές συνθήκες, παρ' ότι δεν ζητούνται, θεωρώντας ότι η βολή γίνεται στο επίπεδο yz: $\vec{r}(0) = 0$ και $\vec{u}(0) = u_0(\cos\theta\,\hat{j} + \sin\theta\,\hat{k})$.

Β)
$$m\frac{du_y}{dt} = -\beta u_y$$
$$m\frac{du_z}{dt} = -mg - \beta u_z.$$

Γ) Για την κίνηση στον άξονα y έχομε:

$$\frac{du_y}{dt} = -\frac{\beta}{m}u_y \quad \Rightarrow \quad \frac{du_y}{u_y} = -\frac{\beta}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du_y}{u_y} = -\frac{\beta}{m}\int dt + c\,,$$

όπου c είναι αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Συνεπώς

$$\ln\left|u_y\right| = -\frac{\beta}{m}t + c \quad \Rightarrow \quad \left|u_y\right| = e^{-\beta t/m}e^{c} \quad \Rightarrow \quad u_y = c_1 e^{-\beta t/m}\,,$$

όπου τη <u>θετική</u> σταθερά e^c με <u>αυθαίρετο</u> πρόσημο τη γράψαμε ως πραγματική σταθερά c_1.

Για την προβολή της κίνησης στον άξονα y, δηλαδή για το $y(t)$ έχομε

$$\frac{dy}{dt} = c_1 e^{-\beta t/m} \quad \Rightarrow \quad dy = c_1 e^{-\beta t/m}dt \quad \Rightarrow \quad \int dy = c_1\int e^{-\beta t/m}dt + c_2 \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = -\frac{m}{\beta}c_1 e^{-\beta t/m} + c_2\,.$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες ότι $y(0) = 0$ και $u_y(0) = u_0\cos\theta$ έχομε

$$u_y(t) = u_0\cos\theta\ e^{-\beta t/m} \quad \text{και} \quad y(t) = \frac{mu_0\cos\theta}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t/m}\right).$$

Για την κίνηση στον άξονα z έχομε

$$\frac{du_z}{dt} = -\left(g + \frac{\beta}{m}u_z\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{du_z}{g + \beta u_z/m} = -dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du_z}{g + \beta u_z/m} = -\int dt + A\,,$$

όπου A είναι αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Συνεπώς

$$\frac{m}{\beta}\ln\left|g + \beta u_z/m\right| = -t + A \quad \Rightarrow \quad \ln\left|g + \beta u_z/m\right| = -\beta t/m + \beta A/m \quad \Rightarrow$$

$$\left|g + \beta u_z/m\right| = e^{-\beta t/m}e^{\beta A/m} \quad \Rightarrow \quad g + \beta u_z/m = Be^{-\beta t/m}\,,$$

όπου τη <u>θετική</u> σταθερά $e^{\beta A/m}$ με <u>αυθαίρετο</u> πρόσημο τη γράψαμε ως πραγματική σταθερά B. Συνεπώς έχομε για την προβολή της ταχύτητας στον άξονα y

$$u_z(t) = \frac{m}{\beta}\left(Be^{-\beta t/m} - g\right).$$

Για την προβολή της κίνησης στον άξονα z, δηλαδή για το $z(t)$ έχομε

$$\frac{dz}{dt}=\frac{m}{\beta}\left(Be^{-\beta t/m}-g\right) \quad \Rightarrow \quad dz=\frac{m}{\beta}\left(Be^{-\beta t/m}-g\right)dt \quad \Rightarrow \quad \int dz=\frac{m}{\beta}\int\left(Be^{-\beta t/m}-g\right)dt+C$$

όπου C είναι αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Συνεπώς,

$$z(t)=-\frac{m^2}{\beta^2}Be^{-\beta t/m}-\frac{mg}{\beta}t+C\,.$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες ότι $u_z(0)=u_0\sin\theta$ και $z(0)=0$ έχομε

$$u_z(t)=\frac{mg}{\beta}\left(e^{-\beta t/m}+\frac{\beta u_0\sin\theta}{mg}e^{-\beta t/m}-1\right)$$

$$z(t)=\frac{m^2}{\beta^2}\left(g+\frac{\beta u_0\sin\theta}{m}\right)\left(1-e^{-\beta t/m}\right)-\frac{mg}{\beta}t\,.$$

Άρα, **η** λύση του δοθέντος προβλήματος είναι

$$\begin{aligned}\vec{r}(t)&=y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}\\ &=\frac{mu_0\cos\theta}{\beta}\left(1-e^{-\beta t/m}\right)\hat{j}+\left[\frac{m^2}{\beta^2}\left(g+\frac{\beta u_0\sin\theta}{m}\right)\left(1-e^{-bt/m}\right)-\frac{mg}{\beta}t\right]\hat{k}\,.\end{aligned}$$

Αυτήν την τροχιά θα ακολουθήσει το υλικό σημείο.

Δ) Παρατηρούμε ότι:
1. Οι αρχικές συνθήκες ικανοποιούνται.
2. Όλοι οι όροι έχουν τις σωστές διαστάσεις. Οι εκθέτες είναι αδιάστατοι, όπως πρέπει.
3. Στον άξονα y η ταχύτητα μηδενίζεται για $t\to\infty$ αφού μόνο δύναμη τριβής ασκείται. Αφού η ταχύτητα μηδενίζεται εκθετικά, η θέση τείνει σε οριακή τιμή.

Στον άξονα z για $t\to\infty$ η δύναμη τριβής εξουδετερώνει τη δύναμη της βαρύτητας και η ταχύτητα τείνει σε οριακή τιμή. Το z τείνει στο $-\infty$, όπως αναμένεται.

Παράδειγμα 2.3: Για ποιό από τα παρακάτω πεδία δυνάμεων $\vec{F}(x,y,z)$ μπορούμε να πούμε ότι ισχύει η ανεξαρτησία των κινήσεων στους τρεις άξονες και γιατί;

Α) $\vec{F}(x,y,z)=F_0\hat{i}+F_0\hat{j}+F_0\hat{k},\qquad F_0=\textit{σταθερά}$

Β) $\vec{F}(x,y,z)=F_0\dfrac{x}{x_0}\hat{i}+F_0\dfrac{y}{y_0}\hat{j}+F_0\hat{k},\qquad F_0,x_0,y_0=\textit{σταθερές}$

Γ) $\vec{F}(x,y,z)=F_0\dfrac{y}{y_0}\hat{i}+F_0\dfrac{x}{x_0}\hat{j}+F_0\hat{k},\qquad F_0,x_0,y_0=\textit{σταθερές}$

Δ) $\vec{F}(x,y,z)=F_1\dfrac{xy}{x_0^2}\hat{i}+F_1\dfrac{xy}{y_0^2}\hat{j}+F_1\dfrac{z}{z_0}\hat{k},\quad F_1,x_0,y_0=σταθερές$

Ε) $\vec{F}(x,y,z)=F_2\dfrac{x^2}{x_0^2}\hat{i}+F_2\dfrac{y^2}{y_0^2}\hat{j}+F_2\dfrac{z^2}{z_0^2}\hat{k},\quad F_2,x_0,y_0,z_0=σταθερές$

ΣΤ) $\vec{F}(x,y,z)=F_0\dfrac{z^2}{z_0^2}\hat{i}+F_1\dfrac{x^2}{x_0^2}\hat{j}+F_2\dfrac{y^2}{y_0^2}\hat{k},\quad F_0,F_1,F_2,x_0,y_0,z_0=σταθερές$

Ζ) $\vec{F}(x,y,z)=F_0\dfrac{x^2z^2}{z_0^4}\hat{i}+F_1\dfrac{y^2x^2}{x_0^4}\hat{j}+F_2\dfrac{z^2y^2}{y_0^4}\hat{k},\quad F_0,F_1,F_2,x_0,y_0,z_0=$ σταθερές

Λύση:

Ας θεωρήσομε το πιο γενικό πεδίο δυνάμεων

$$\vec{F}(x,y,z)=F_x(x,y,z)\hat{i}+F_y(x,y,z)\hat{j}+F_z(x,y,z)\hat{k}\,.$$

Η διανυσματική εξίσωση κίνησης υλικού σημείου μάζας m υπό την επίδραση της ως άνω δύναμης είναι

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}(x,y,z)\,,$$

η οποία υπό μορφή συνιστωσών γράφεται

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x(x,y,z)\,.$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y(x,y,z)\,,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z(x,y,z)\,.$$

Είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να λύσομε μόνη της την πρώτη εξίσωση ως προς x αν η F_x εξαρτάται από τα y και z. Ομοίως για τη δεύτερη και την τρίτη εξίσωση. Άρα το πιο γενικό πεδίο $\vec{F}(x,y,z)$ για το οποίο μπορούμε να πούμε ότι ισχύει η ανεξαρτησία των κινήσεων στους τρεις άξονες είναι

$$\vec{F}(x,y,z)=F_x(x)\hat{i}+F_y(y)\hat{j}+F_z(z)\hat{k}\,.$$

Με αυτό υπ' όψιν, συμπεραίνομε ότι για τα πεδία δυνάμεων Α, Β και Ε έχομε ανεξαρτησία των κινήσεων, ενώ για τα υπόλοιπα δεν έχομε.

2.2 Εύρεση δύναμης από την τροχιά

Μέχρι τώρα έχομε δει ότι αν μας δίνεται η δύναμη που ασκείται σε ένα υλικό σημείο, τότε από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα και τις αρχικές συνθήκες βρίσκομε την τροχιά που θα κάνει το υλικό σημείο. Τώρα θα αντιστρέψομε το πρόβλημα. Έστω ότι μας δίνεται η τροχιά $\vec{r} = \vec{r}(t)$ που ακολουθεί ένα υλικό σημείο. Μπορούμε να βρούμε τη δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο; Η απάντηση είναι, ναι, πολύ εύκολα. Αρκεί να παραγωγίσομε την εξίσωση της τροχιάς δυο φορές ως προς τον χρόνο και να πολλαπλασιάσομε με τη μάζα του υλικού σημείου.

Παράδειγμα 2.4: Θεωρείστε ότι υλικό σημείο μάζας m κάνει κυκλική τροχιά ακτίνας R στο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Τι δύναμη ασκείται στο υλικό σημείο;

<u>Λύση</u>: Ας θεωρήσομε σύστημα συντεταγμένων xy, περιφέρεια κύκλου ακτίνας R με κέντρο την αρχή των αξόνων, καθώς και υλικό σημείο μάζας m που κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω στην περιφέρεια του κύκλου. Την τυχούσα χρονική στιγμή t το υλικό σημείο έχει συντεταγμένες x, y, που ικανοποιούν τη σχέση $x^2 + y^2 = R^2$. Η διανυσματική ακτίνα του υλικού σημείου την τυχούσα χρονική στιγμή t είναι

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\,\hat{j} = R\cos\theta\,\hat{i} + R\sin\theta\,\hat{j}\,.$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα $\vec{r}$ με τον άξονα x. Επειδή το υλικό σημείο κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $d\theta / dt = \omega =$ σταθερά, έχομε ότι $\theta = \theta(t) = \omega t$, όπου θεωρήσαμε ότι για $t = 0$ το υλικό σημείο ήταν στον άξονα x στη θέση $x = R$. Έτσι η διανυσματική ακτίνα του υλικού σημείου την τυχούσα χρονική στιγμή t είναι

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} = R\cos\omega t\,\hat{i} + R\sin\omega t\,\hat{j}\,.$$

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχομε ότι

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = m\frac{d}{dt}\left[\frac{d(R\cos\omega t\,\hat{i} + R\sin\omega t\,\hat{j})}{dt}\right] \\ &= m\frac{d}{dt}\left[-R\omega\sin\omega t\,\hat{i} + R\omega\cos\omega t\,\hat{j}\right] = -mR\omega^2\cos\omega t\,\hat{i} - mR\omega^2\sin\omega t\,\hat{j} \\ &= -m\omega^2(R\cos\omega t\,\hat{i} + R\sin\omega t\,\hat{j}) = -m\omega^2\vec{r}\,.\end{aligned}$$

<u>Αποδείξαμε</u> λοιπόν ότι η δύναμη είναι κεντρομόλος και έχει μέτρο $m\omega^2|\vec{r}| = m\omega^2 R$.

Παράδειγμα 2.5: Θεωρείστε ότι υλικό σημείο μάζας m κάνει κυκλική τροχιά ακτίνας R στο οριζόντιο επίπεδο με <u>μη σταθερή</u> γωνιακή ταχύτητα $\omega = \omega(t)$. Τι δύναμη ασκείται στο υλικό σημείο;

Λύση: Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η διανυσματική ακτίνα του υλικού σημείου την τυχούσα χρονική στιγμή t είναι

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = R\cos\theta\,\hat{i} + R\sin\theta\,\hat{j}\,.$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα $\vec{r}$ με τον άξονα x. Επειδή το υλικό σημείο κινείται με μη σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = \omega(t)$, έχομε

$d\theta/dt = \omega(t) \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \int_0^t \omega(t')\,dt'$, όπου θεωρήσαμε ότι για $t = 0$ το υλικό σημείο ήταν στον άξονα x στη θέση $x = R$. Έτσι η διανυσματική ακτίνα του υλικού σημείου την τυχούσα χρονική στιγμή t είναι

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} = R\cos\theta(t)\,\hat{i} + R\sin\theta(t)\,\hat{j}\,.$$

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχομε ότι

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = m\frac{d}{dt}\left[\frac{d(R\cos\theta\,\hat{i} + R\sin\theta\,\hat{j})}{dt}\right]$$

$$= m\frac{d}{dt}\left[-R\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\,\hat{i} + R\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\,\hat{j}\right] = m\frac{d}{dt}\left[-R\omega\sin\theta\,\hat{i} + R\omega\cos\theta\,\hat{j}\right].$$

Για να συνεχίσομε τις πράξεις πρέπει να προσέξομε ότι τόσο το θ όσο και το ω είναι συναρτήσεις του χρόνου. Έτσι γράφομε βάσει του κανόνα παραγώγισης γινομένου

$$\vec{F} = -mR\frac{d\omega}{dt}\sin\theta\,\hat{i} - mR\omega\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{i} + mR\frac{d\omega}{dt}\cos\theta\,\hat{j} - mR\omega\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{j}$$

$$= -mR\alpha\sin\theta\,\hat{i} - mR\omega\cos\theta\,\omega\,\hat{i} + mR\alpha\cos\theta\,\hat{j} - mR\omega\sin\theta\,\omega\,\hat{j}$$

$$= -m\omega^2 R(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}) + mR\alpha(-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})\,,$$

όπου τη γωνιακή επιτάχυνση $d\omega/dt$ τη συμβολίσαμε με α.

Το διάνυσμα που είναι στην πρώτη παρένθεση είναι το <u>μοναδιαίο</u> ακτινικό διάνυσμα

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{R} = \frac{R(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j})}{R} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}\,,$$

ενώ το διάνυσμα που είναι στη δεύτερη παρένθεση είναι το <u>μοναδιαίο</u> επιτρόχιο διάνυσμα

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}\,.$$

Για να βεβαιωθούμε ότι είναι έτσι, ας εξετάσομε την κατεύθυνση του διανύσματος $\hat{\theta}$ για διάφορες τιμές της γωνίας θ.

Για $\theta = 0$ έχομε $\hat{\theta} = 0\hat{i} + 1\hat{j} = \hat{j}$. Είναι παράλληλο προς τον άξονα y (δείχνει προς τα θετικά του), δηλαδή κάθετο στον άξονα x, άρα είναι εφαπτόμενο του κύκλου.
Για $\theta = \pi/2$ έχομε $\hat{\theta} = -\hat{i}$. Είναι παράλληλο προς τον άξονα x (δείχνει προς τα αρνητικά του), δηλαδή κάθετο στον άξονα y, άρα είναι εφαπτόμενο του κύκλου.
Για $\theta = \pi$ έχομε $\hat{\theta} = -\hat{j}$. Είναι παράλληλο προς τον άξονα y (δείχνει προς τα αρνητικά του), δηλαδή κάθετο στον άξονα x, άρα είναι εφαπτόμενο του κύκλου.
Για $\theta = 3\pi/2$ έχομε $\hat{\theta} = \hat{i}$. Είναι παράλληλο προς τον άξονα x (δείχνει προς τα θετικά του), δηλαδή κάθετο στον άξονα y, άρα είναι εφαπτόμενο του κύκλου.
Για τυχούσα γωνία θ, αν κάνομε παράλληλη μετατόπιση του $\hat{\theta}$ στην αρχή των αξόνων και υπολογίσομε τις συνιστώσες του στους άξονες x και y, βρίσκομε ότι αυτές είναι $-\sin\theta$ και $\cos\theta$ αντιστοίχως.

Έτσι η δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο είναι

$$\hat{F} = -m\omega^2 R\,\hat{r} + mR\alpha\,\hat{\theta},$$

Δηλαδή έχει ακτινική συνιστώσα με μέτρο $m\omega^2 R$ και επιτρόχια συνιστώσα με μέτρο $mR\alpha$. Η ακτινική συνιστώσα (κεντρομόλος) το κρατάει σε κυκλική τροχιά και η επιτρόχια συνιστώσα το επιταχύνει ή το επιβραδύνει ανάλογα με το πρόσημο του α.

<u>Προσοχή</u>: Όπως είπαμε παραπάνω,

$$d\theta/dt = \omega(t) \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \int_0^t \omega(t')\,dt'.$$

Έτσι, αν π.χ., $\omega(t) = \omega_0 \dfrac{t}{t_0}$, όπου ω_0, t_0 είναι σταθερές, έχομε

$\theta(t) = \dfrac{1}{2}\omega_0 \dfrac{t^2}{t_0} = \dfrac{1}{2}\omega(t)t$ <u>και όχι</u> $\omega(t)t$!!!

Άσκηση 2.1: Χρησιμοποιώντας τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα,
Α) δείξτε ότι αν ένα υλικό σημείο μάζας m εκτελεί κίνηση στον άξονα x, η οποία περιγράφεται από τη σχέση $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$, όπου A, B, $\omega = \sqrt{k/m}$ είναι <u>πραγματικές</u> σταθερές, η δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο είναι δύναμη ελατηρίου σταθεράς k.
Β) Τι διαφορά υπάρχει μεταξύ του παραπάνω $x(t)$, του $x(t) = C\sin(\omega t + \phi)$, όπου C, ϕ είναι <u>πραγματικές</u> σταθερές και του $x(t) = C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{i\omega t}$, όπου C_1, C_2 είναι <u>μιγαδικές</u> σταθερές;

Άσκηση 2.2: Σε μονοδιάστατα προβλήματα κίνησης υλικού σημείου μάζας m και δυναμικής ενέργειας $V(x)$ η ταχύτητα του υλικού σημείου δίνεται από τη σχέση $u(x) = \sqrt{\dfrac{2}{m}[E - V(x)]}$, όπου E είναι η <u>σταθερή</u> ολική ενέργεια. Χρησιμοποιώντας τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα, να βρείτε το πεδίο δυνάμεων $F(x)$ αν $V(x) = \lambda x^2$, $\lambda > 0$.

Άσκηση 2.3: Θεωρείστε τον Ήλιο μάζας M σαν σημείο στην αρχή των αξόνων xy. Η Γη με μάζα m (θεωρείστε την επίσης σαν σημείο) κινείται γύρω από τον Ήλιο. Σύμφωνα με τον νόμο της παγκόσμιας έλξης, η ελκτική δύναμη που ασκεί ο Ήλιος στη Γη είναι

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r},$$

όπου $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ είναι η διανυσματική ακτίνα της Γης ως προς τον Ήλιο. Με άλλα λόγια, x και y είναι οι <u>στιγμιαίες</u> συντεταγμένες της Γης στο σύστημα xy, στην αρχή του οποίου βρίσκεται ο Ήλιος.

Α) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης της Γης για τους δυο άξονες x και y.

Β) Υπάρχει ανεξαρτησία των κινήσεων;

Γ) Δείξτε ότι οι εξισώσεις κίνησης επιτρέπουν στη Γη να κάνει κύκλο ακτίνας R αν η γωνιακή ταχύτητά της είναι $\omega = \sqrt{GM/R^3}$.