ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Παγκόσμια έλξη

11.1 Δύναμη μεταξύ υλικών σημείων

Σε ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε δυο σημειακές μάζες m και m'. Η μάζα m' είναι ακίνητη στην αρχή των αξόνων και η μάζα m βρίσκεται στη διανυσματική ακτίνα $\vec{r}$. Ο *νόμος της παγκόσμιας έλξης* λέει ότι η δύναμη που ασκεί η μάζα m' στη μάζα m είναι

$$\vec{F} = -G\frac{mm'}{r^2}\hat{r} = -G\frac{mm'}{r^3}\vec{r} . \tag{11.1}$$

Δεν είναι απαραίτητο να είναι η μια μάζα ακίνητη. Στην πραγματικότητα, σε κανένα φυσικό σύστημα (π.χ., Γη – Σελήνη, Ήλιος – Γη, πρωτόνιο – ηλεκτρόνιο) δεν υπάρχει ακίνητη μάζα. Το ότι παίρνομε τη μια μάζα σαν ακίνητη είναι μόνο για λόγους ευκολίας. Έτσι θα διατυπώσομε τον νόμο της παγκόσμιας έλξης στη γενική περίπτωση.

Σε ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε δυο σημειακές μάζες m_1 και m_2. Η μάζα m_1 έχει διανυσματική ακτίνα $\vec{r}_1$ και η μάζα m_2 έχει διανυσματική ακτίνα $\vec{r}_2$. Ο *νόμος της παγκόσμιας έλξης* λέει ότι η δύναμη που ασκεί η μάζα m_1 στη μάζα m_2 είναι

$$\vec{F}_{1\to 2} = G\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = G\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2}\hat{n} , \tag{11.2}$$

όπου $\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|$ είναι η απόσταση μεταξύ των μαζών και $\hat{n} = \dfrac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα από τη μάζα m_2 προς τη μάζα m_1.

Για $\vec{r}_1 = 0$ (δηλαδή η μάζα m_1 είναι στην αρχή των αξόνων) και $\vec{r}_2 = \vec{r}$ η εξίσωση (11.2) γίνεται ουσιαστικά ίδια με την εξίσωση (11.1). Το ότι το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$ είναι από τη μάζα m_2 προς τη μάζα m_1 μπορούμε να το δούμε ως εξής. Ας πούμε ότι το διάνυσμα $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ είναι ένα άγνωστο διάνυσμα $\vec{A}$, δηλαδή $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{A}$. Αυτό σημαίνει ότι $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{A}$, δηλαδή αν στο διάνυσμα $\vec{r}_2$ προσθέσομε το άγνωστο διάνυσμα $\vec{A}$ παίρνομε το διάνυσμα $\vec{r}_1$. Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $\vec{A} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ έχει αρχή το τέλος του $\vec{r}_2$ και τέλος το τέλος του $\vec{r}_1$. Άρα κατευθύνεται από τη μάζα m_2 προς τη μάζα m_1. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$ είναι ίσο με $\vec{A}/\left|\vec{A}\right|$.

11.2 Δύναμη μεταξύ σφαιρικών σωμάτων

Παρότι ο νόμος της παγκόσμιας έλξης ισχύει για υλικά σημεία, τον χρησιμοποιούμε και για συστήματα όπως Ήλιος – Γη ή Γη – Σελήνη. Αυτό βασίζεται στο παρακάτω θεώρημα, που δεν θα αποδείξομε εδώ.

Θεώρημα 11.1: Ένας ομογενής σφαιρικός φλοιός έλκει υλικά σημεία που βρίσκονται στο εξωτερικό του σαν να ήταν όλη η μάζα του συγκεντρωμένη στο κέντρο του.

Πόρισμα 11.1: Εκτεταμένα σφαιρικά αντικείμενα, είτε με σταθερή πυκνότητα $\rho = \rho_0$ (δηλαδή ομογενή) είτε με πυκνότητα που εξαρτάται μόνο από την απόσταση r από το κέντρο τους, $\rho = \rho(r)$ (δηλαδή αποτελούνται από ομογενείς σφαιρικούς φλοιούς), έλκουν εξωτερικά υλικά σημεία σαν να ήταν όλη η μάζα τους συγκεντρωμένη στο κέντρο τους.

Απόδειξη: Αφού το θεώρημα 11.1 ισχύει για κάθε σφαιρικό φλοιό του σώματος, θα ισχύει και για ολόκληρο το σώμα.

Πόρισμα 11.2: Δυο εκτεταμένα σφαιρικά αντικείμενα, το καθένα με σταθερή πυκνότητα ή με πυκνότητα που εξαρτάται μόνο από την απόσταση r από το κέντρο τους, έλκονται μεταξύ τους σαν ήταν όλη η μάζα τους συγκεντρωμένη στο κέντρο τους.

Απόδειξη: Από το Πόρισμα 11.1 και τον Τρίτο νόμο του Νεύτωνα έπεται το Πόρισμα 11.2. Θεωρώντας τον Ήλιο και τη Γη ως σφαιρικά ομογενή σώματα, μπορούμε να γράψομε την μεταξύ τους έλξη σαν να ήταν υλικά σημεία.

Ένα άλλο σημαντικό θεώρημα είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 11.2: Ένας ομογενής σφαιρικός φλοιός δεν ασκεί δύναμη σε οποιαδήποτε μάζα οπουδήποτε στο εσωτερικό του.

Πόρισμα 11.3: : Σε εκτεταμένα σφαιρικά αντικείμενα είτε με σταθερή πυκνότητα $\rho = \rho_0$ είτε με πυκνότητα που εξαρτάται μόνο από την απόσταση r από το κέντρο τους, δηλαδή $\rho = \rho(r)$, ένα υλικό σημείο στην τυχούσα ακτίνα r (στο εσωτερικό του εκτεταμένου αντικειμένου) έλκεται μόνο από τη μάζα που είναι εσωτερικά της σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας r και καθόλου από τα εξωτερικά στρώματα.

Σχόλιο: Είναι σημαντικό να τονιστεί εδώ ότι τα παραπάνω θεωρήματα και πορίσματα δεν ισχύουν για σώματα που δεν είναι σφαιρικά.

Παράδειγμα 11.1: Θεωρήστε μια σήραγγα κατά μήκος μιας διαμέτρου της Γης. Από την επιφάνεια της Γης αφήνομε να πέσει μια σημειακή μάζα m στη σήραγγα. Θεωρώντας ότι η Γη είναι ομογενής και σφαιρική, δείξτε ότι η μάζα m θα κάνει αρμονική ταλάντωση.

Λύση: Ας θεωρήσομε τη σήραγγα ως τον άξονα z με τη θετική φορά προς τα πάνω. Την χρονική στιγμή $t = 0$ η μάζα αφήνεται να πέσει από τη θέση $z(0) = R$, όπου R

είναι η ακτίνα της Γης. Αν M είναι η μάζα της Γης, τότε η πυκνότητά της είναι $\rho_0 = \frac{M}{4\pi R^3/3}$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 3, όταν η σημειακή μάζα m βρίσκεται στην <u>τυχούσα</u> θέση z μέσα στη σήραγγα, της ασκείται δύναμη μόνο από τη μάζα της Γης που είναι εσωτερικά της σφαιρικής επιφάνειας με ακτίνα $|z|$, δηλαδή από μάζα $M(z) = \rho_0 \frac{4}{3}\pi |z|^3 = M\frac{|z|^3}{R^3}$. Το μέτρο της ασκούμενης δύναμης είναι $G\frac{M(z)m}{|z|^2} = G\frac{Mm}{R^3}|z|$ και επομένως η εξίσωση κίνησης της μάζας m είναι

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -G\frac{Mm}{R^3}z\,,$$

όπου λάβαμε υπόψη μας ότι για $z > 0$ η δύναμη είναι αρνητική και για $z < 0$ η δύναμη είναι θετική. Αυτή είναι εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή και η λύση της, για τις δοθείσες αρχικές συνθήκες, είναι

$$z(t) = R\cos\omega t\,,$$

όπου

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}\,.$$

Άσκηση 11.1: Θεωρήστε μια τυχούσα <u>ευθύγραμμη</u> σήραγγα, που ξεκινά από ένα σημείο της επιφάνειας της Γης και καταλήγει σε ένα άλλο σημείο της επιφάνειάς της. Στο ένα άκρο της σήραγγας αφήνομε να πέσει μια σημειακή μάζα m στη σήραγγα. Θεωρώντας ότι η Γη είναι <u>ομογενής και σφαιρική</u>, δείξτε ότι η μάζα m θα κάνει <u>αρμονική</u> ταλάντωση.

11.3 Δύναμη μεταξύ εκτεταμένου σώματος και υλικού σημείου

Θέλομε τώρα να δούμε με ποιόν τρόπο θα υπολογίζομε τη δύναμη έλξης μεταξύ δυο τυχόντων εκτεταμένων αντικειμένων. Θα ξεκινήσομε πρώτα με τον υπολογισμό της δύναμης έλξης μεταξύ ενός εκτεταμένου σώματος και ενός υλικού σημείου. Το επόμενο παράδειγμα είναι μια τέτοια περίπτωση.

Παράδειγμα 11.2: Θεωρήστε μια ομογενή ράβδο μάζας M στον άξονα x από τη θέση $x = 0$ μέχρι τη θέση $x = L > 0$. Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί η ράβδος σε σημειακή μάζα m που βρίσκεται στην τυχούσα θέση $x > L$.

Λύση: Η γραμμική πυκνότητα της ράβδου είναι $\lambda = M/L$. Θεωρούμε το απειροστό κομμάτι της ράβδου μεταξύ x' και $x' + dx'$, όπου $0 < x' < L$. Το απειροστό αυτό κομμάτι της ράβδου έχει μάζα $dm' = \lambda dx'$ και είναι σαν υλικό σημείο. Άρα μπορούμε να εφαρμόσομε τον νόμο της παγκόσμιας έλξης (11.2) μεταξύ αυτού και της σημειακής μάζας m. Η δύναμη που ασκεί η dm' στην m είναι

$$d\vec{F} = -G\frac{m\,dm'}{(x-x')^2}\hat{i}\,.$$

Συνεπώς, η συνολική δύναμη που ασκεί η ράβδος στη σημειακή μάζα m είναι

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = -Gm\lambda\hat{i}\int_0^L \frac{dx'}{(x-x')^2} = -\,Gm\frac{M}{L}\left[\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x}\right]\hat{i}\,.$$

Στην προκειμένη περίπτωση δεν ήταν απαραίτητο να βάλομε διανύσματα. Εξ ίσου σωστά θα μπορούσαμε να γράψομε

$$F = \int dF = -Gm\lambda\int_0^L \frac{dx'}{(x-x')^2} = -\,Gm\frac{M}{L}\left[\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x}\right].$$

Το αποτέλεσμα έχει σωστές διαστάσεις, δηλαδή $G\times$μάζα^2/μήκος^2.

Παράδειγμα 11.3: Θεωρήστε μια ομογενή ράβδο μάζας M στον άξονα x από τη θέση $x=0$ μέχρι τη θέση $x=L>0$. Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί η ράβδος σε σημειακή μάζα m που βρίσκεται στην τυχούσα θέση y του άξονα y.

Λύση: Η γραμμική πυκνότητα της ράβδου είναι $\lambda = M/L$. Θεωρούμε το απειροστό κομμάτι της ράβδου μεταξύ x και $x+dx$, όπου $0<x<L$. Το απειροστό αυτό κομμάτι της ράβδου έχει μάζα $dm = \lambda dx$ και είναι σαν υλικό σημείο. Άρα μπορούμε να εφαρμόσομε τον νόμο της παγκόσμιας έλξης (11.2) μεταξύ αυτού και της σημειακής μάζας m. Η δύναμη που ασκεί η dm στην m είναι

$$d\vec{F} = G\frac{m\,dm}{x^2+y^2}\hat{n}\,,$$

όπου $\hat{n}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα από την m προς την dm. Ας πούμε $\vec{A}$ το διάνυσμα από την m μέχρι την dm. Τότε $\vec{A} = -y\,\hat{j} + x\,\hat{i}$. Συνεπώς,

$$\hat{n} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{x\,\hat{i} - y\,\hat{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Συνεπώς, η συνολική δύναμη που ασκεί η ράβδος στη μάζα m είναι

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = Gm\frac{M}{L}\int_0^L \frac{dx(x\,\hat{i} - y\,\hat{j})}{(x^2+y^2)^{3/2}} = Gm\frac{M}{L}\left[\left(\frac{1}{|y|} - \frac{1}{\sqrt{L^2+y^2}}\right)\hat{i} - \frac{1}{y}\frac{L}{\sqrt{L^2+y^2}}\hat{j}\right].$$

Παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι έχουν σωστές διαστάσεις, δηλαδή $G\times$μάζα^2/μήκος^2. Η y συνιστώσα της δύναμης είναι αρνητική (για $y>0$), αφού η δύναμη έλξης στη μάζα m είναι προς τα κάτω, και θετική (για $y<0$). Η x συνιστώσα της δύναμης είναι θετική, αφού η ράβδος είναι στον θετικό ημιάξονα x, άρα έλκει τη μάζα m «προς τα δεξιά».

Άσκηση 11.2: Θεωρήστε μια ομογενή ράβδο μάζας M στον άξονα x από τη θέση $x = -L$ μέχρι τη θέση $x = L > 0$. Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί η ράβδος σε σημειακή μάζα m που βρίσκεται στην τυχούσα θέση $y > 0$ του άξονα y.

Απάντηση: $\vec{F} = -Gm\dfrac{M}{L}\dfrac{2}{y}\dfrac{L}{\sqrt{L^2 + y^2}}\hat{j}$.

Άσκηση 11.3: Θεωρήστε ότι ο άξονας x έχει μάζα με γραμμική πυκνότητα λ. Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί όλος ο άξονας x σε σημειακή μάζα m που βρίσκεται στην τυχούσα θέση $y > 0$ του άξονα y.

Απάντηση: $\vec{F} = -Gm\lambda\dfrac{2}{y}\hat{j}$. Βεβαιωθείτε ότι έχει διαστάσεις δύναμης.

Παράδειγμα 11.4: Θεωρήστε ότι η περιφέρεια κύκλου ακτίνας R έχει μάζα με γραμμική πυκνότητα λ. Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί σε σημειακή μάζα m στο κέντρο του κύκλου ένα ημικύκλιό του.

Λύση: Ας θεωρήσομε κύκλο ακτίνας R στο επίπεδο xy με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων. Ας θεωρήσομε επίσης το ημικύκλιο που έχει $y > 0$. Η διανυσματική ακτίνα ενός τυχόντος σημείου αυτού του ημικυκλίου σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό ημιάξονα x. Ας θεωρήσομε τώρα το απειροστό κομμάτι του ημικυκλίου που βρίσκεται μεταξύ των γωνιών θ και $\theta + d\theta$. Αυτό έχει μήκος $R\,d\theta$ και μάζα $dm = \lambda R\,d\theta$. Η ελκτική δύναμη που ασκεί η dm στην m είναι

$$d\vec{F} = G\frac{m\,dm}{R^2}\hat{r} = G\frac{m\,dm}{R^2}(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}).$$

Συνεπώς, η δύναμη που ασκεί το ημικύκλιο στη μάζα m είναι

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = G\frac{m\lambda}{R}\int_0^{\pi} d\theta(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}) = 2G\frac{m\lambda}{R}\hat{j}.$$

Η δύναμη έχει τη σωστή κατεύθυνση και σωστές διαστάσεις.

Άσκηση 11.4: Θεωρήστε ότι η περιφέρεια κύκλου ακτίνας R έχει μάζα με γραμμική πυκνότητα λ. Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί σε σημειακή μάζα m στο κέντρο του κύκλου ένα τεταρτημόριό του.

Απάντηση: Για το πρώτο τεταρτημόριο (δηλ. [0, π/2]) $\vec{F} = G\dfrac{m\lambda}{R}(\hat{i} + \hat{j})$.

Άσκηση 11.5: Θεωρήστε ότι το επίπεδο xy έχει μάζα με επιφανειακή πυκνότητα σ. Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί όλο το επίπεδο xy σε σημειακή μάζα m που βρίσκεται στην τυχούσα θέση z του άξονα z.

Υπόδειξη: Με κέντρο την αρχή των αξόνων θεωρήστε στο επίπεδο xy δακτύλιο με εσωτερική ακτίνα r και εξωτερική $r+dr$. Γράψτε τη δύναμη που ασκεί ο δακτύλιος στη μάζα m. Λόγω συμμετρίας θα έχει μόνο z συνιστώσα. Από διαστάσεις και μόνο, το τελικό αποτέλεσμα θα είναι ανάλογο του $G\sigma m$, αφού το γινόμενο αυτών των τριών ποσοτήτων έχει διαστάσεις δύναμης, δηλαδή $G\times$μάζα^2/μήκος^2. Δεν υπάρχει άλλος συνδυασμός των τριών αυτών ποσοτήτων που να έχει διαστάσεις δύναμης.

Απάντηση: $\vec{F} = -4\pi G\sigma \dfrac{z}{|z|}\hat{k}$. Βεβαιωθείτε ότι έχει διαστάσεις δύναμης.

11.4 Δύναμη μεταξύ εκτεταμένων σωμάτων

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για να υπολογίσομε την ελκτική δύναμη μεταξύ δυο εκτεταμένων σωμάτων, πρέπει να πάρομε ένα απειροστό κομμάτι του ενός και ένα απειροστό κομμάτι του άλλου, να γράψομε τη δύναμη μεταξύ των δυο κομματιών και να ολοκληρώσομε τόσο ως προς το ένα σώμα όσο και ως προς το άλλο. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 11.5: Θεωρήστε μια ομογενή ράβδο μάζας M στον άξονα x από τη θέση $x=0$ μέχρι τη θέση $x=L$. Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί η ράβδος σε δεύτερη όμοια ράβδο που βρίσκεται στον άξονα x μεταξύ των σημείων $x=2L$ και $x=3L$.

Λύση: Η γραμμική πυκνότητα της κάθε ράβδου είναι $\lambda = M/L$. Θεωρούμε το απειροστό κομμάτι της πρώτης ράβδου μεταξύ x' και $x'+dx'$, όπου $0<x'<L$ και το απειροστό κομμάτι της δεύτερης ράβδου μεταξύ x και $x+dx$, όπου $2L<x<3L$ Το απειροστό κομμάτι της πρώτης ράβδου έχει μάζα $dm' = \lambda dx'$ και είναι σαν υλικό σημείο. Ομοίως, το απειροστό κομμάτι της δεύτερης ράβδου έχει μάζα $dm = \lambda dx$ και είναι σαν υλικό σημείο. Άρα μπορούμε να εφαρμόσομε τον νόμο της παγκόσμιας έλξης (11.2) μεταξύ των δυο κομματιών. Η δύναμη που ασκεί η dm' στην dm είναι

$$d\vec{F} = -G\frac{dm\,dm'}{(x-x')^2}\hat{i}\,.$$

Συνεπώς, η συνολική δύναμη που ασκεί η πρώτη ράβδος στη δεύτερη είναι

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = -G\lambda^2\hat{i}\int_{2L}^{3L} dx\int_0^L \frac{dx'}{(x-x')^2} = -G\lambda^2\hat{i}\int_{2L}^{3L} dx\left[\frac{1}{x-L}-\frac{1}{x}\right] = -G\lambda^2\left[\ln 2 - \ln\frac{3}{2}\right]\frac{L}{|L|}\hat{i}\,.$$

ή

$$\vec{F} = -G\lambda^2 \ln\frac{4}{3}\frac{L}{|L|}\hat{i} \ .$$

Η δύναμη έχει τη σωστή κατεύθυνση λόγω του παράγοντα $L/|L|$, που βάλαμε με το χέρι. Έτσι, για $L > 0$ η δύναμη είναι αρνητική, ενώ για $L < 0$ η δύναμη είναι θετική. Επίσης, το αποτέλεσμα έχει σωστές διαστάσεις. Το ότι το αποτέλεσμα θα ήταν ανάλογο του $G\lambda^2$ μπορούσαμε να το βρούμε μόνο από διαστάσεις. <u>Δεν υπάρχει άλλος συνδυασμός των δυο αυτών ποσοτήτων που να έχει διαστάσεις δύναμης και οι δυο αυτές ποσότητες είναι αδύνατον να λείπουν από το αποτέλεσμα</u>!!!

Άσκηση 11.6: Θεωρήστε ότι ο άξονας x έχει μάζα με γραμμική πυκνότητα λ_1. Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί όλος ο άξονας x σε ράβδο γραμμικής πυκνότητας λ_2 που βρίσκεται στον άξονα y μεταξύ των θέσεων $y = L$ και $y = 2L$.

Απάντηση: $\vec{F} = -(2G\lambda_1\lambda_2 \ln 2)\frac{L}{|L|}\hat{j}$.