ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι

Ακαδημαϊκό έτος 2017 - 2018

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Νίκος Κυλάφης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

19/9/2017

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΚΑΙ ΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Το μάθημα της Γενικής Φυσικής Ι θα γίνεται κάθε Δευτέρα και Τετάρτη 11:00 – 13:00 και κάθε Παρασκευή 12:00 – 14:00.

Λόγω ακαδημαϊκών υποχρεώσεων του διδάσκοντα, ένα ή δυο δίωρα δεν θα γίνουν σύμφωνα με το Πρόγραμμα. Η αναπλήρωσή τους θα γίνει από τον διδάσκοντα συγκεκριμένες Δευτέρες, 18:00 – 20:00. Οι ημερομηνίες αυτές θα ανακοινωθούν εγκαίρως από τον διδάσκοντα στην αίθουσα διδασκαλίας.

Σχετικά με τις εξετάσεις του μαθήματος, θα υπάρξουν δυο Πρόοδοι και ένα Τελικό διαγώνισμα:

1η Πρόοδος: Δευτέρα, 23 Οκτωβρίου 2017, 18:00 – 19:00. Θα εξεταστεί η ύλη των τεσσάρων πρώτων εβδομάδων.

2η Πρόοδος: Δευτέρα, 20 Νοεμβρίου 2017, 18:00 – 19:00. Θα εξεταστεί η ύλη των επόμενων τεσσάρων εβδομάδων.

Τελικό διαγώνισμα: Σύμφωνα με το Πρόγραμμα Εξετάσεων Ιανουαρίου. Θα εξεταστεί όλη η ύλη του Μαθήματος.

Κάθε Πρόοδος μετράει 25% του τελικού βαθμού και το Τελικό Διαγώνισμα μετράει 50% του τελικού βαθμού.

Προόδους θα δώσουν μόνο οι πρωτοετείς φοιτητές. Οι φοιτητές των άλλων ετών θα δώσουν μόνο το τελικό διαγώνισμα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

Παράγωγος συνάρτησης:

Η *παράγωγος* της συνάρτησης $f(t)$ ορίζεται ως:

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Διαφορικό συνάρτησης:

Σχηματίζομε τι διαφορά

$$\Delta f = f(t+\Delta t) - f(t) = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \Delta t.$$

Στο όριο $\Delta t \to 0$ έχομε το *διαφορικό* της συνάρτησης $f(t)$

$$df \equiv \left(\frac{df}{dt}\right) dt = f'(t)\, dt.$$

Αόριστο ολοκλήρωμα:

Έστω ότι $f(t) = \dfrac{dg(t)}{dt} = g'(t)$. Το *αόριστο ολοκλήρωμα* της $f(t)$ ορίζεται ως:

$$\int f(t)\, dt \equiv \int \left(\frac{dg(t)}{dt}\right) dt = \int dg = g(t).$$

Παραδείγματα αορίστων ολοκληρωμάτων:

Αν C είναι αυθαίρετη σταθερά, τότε:

$$\int e^t \, dt = e^t + C,$$

$$\int e^{at} \, dt = \frac{1}{a} e^{at} + C,$$

$$\int t^a \, dt = \frac{1}{a+1} t^{a+1} + C, \quad a \neq -1,$$

$$\int t^{-1} \, dt = \ln|t| + C,$$

$$\int \sin at \; dt = -\frac{1}{a} \cos at + C,$$

$$\int \cos at \; dt = \frac{1}{a} \sin at + C \; .$$

Ορισμένο ολοκλήρωμα:

Έστω ότι $f(t) = \dfrac{dg(t)}{dt} = g'(t)$. Το *ορισμένο ολοκλήρωμα* της $f(t)$ από $t = a$ μέχρι $t = b$ ορίζεται ως:

$$\int_a^b f(t)\,dt \equiv \int_a^b \left(\frac{dg(t)}{dt} \right) dt = \int_a^b dg(t) = g(b) - g(a) \; .$$

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Η Μηχανική, όπως και η Ευκλείδεια Γεωμετρία, είναι Αξιωματική Επιστήμη. Ο Ευκλείδης έθεσε το αξίωμα ότι «από σημείο εκτός ευθείας άγεται μια μόνο παράλληλος προς την ευθεία». Όλα τα θεωρήματα, πορίσματα και προβλήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αποδεικνύονται αν δεχτούμε ότι ισχύει αυτό το αξίωμα.

Κατά όμοιο τρόπο, όλα τα θέματα της Νευτώνειας Μηχανικής <u>αποδεικνύονται</u> αν δεχτούμε δυο αξιώματα: Τον Δεύτερο και τον Τρίτο Νόμο του Νεύτωνα. Ο Πρώτος Νόμος του Νεύτωνα είναι υποπερίπτωση του Δεύτερου.

Σκοπός αυτών των σημειώσεων είναι να παρουσιάσουν τη Μηχανική ως Αξιωματική Επιστήμη. Έτσι, με τη χρήση Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού θα αποδείξομε όλα τα συμπεράσματα της Μηχανικής.

Ορισμός: *Σημειακή μάζα* ή *υλικό σημείο* λέγεται η μάζα που δεν έχει διαστάσεις. Είναι ένα <u>νοητό</u> κατασκεύασμα, αφού τα σώματα που έχουν μάζα έχουν και διαστάσεις. Όταν λοιπόν λέμε *υλικό σημείο* μάζας m θα εννοούμε ένα σώμα με μάζα m αλλά όλη η μάζα περιορίζεται σε ένα σημείο.

Αξίωμα 1 ή **Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα:** Αν σε υλικό σημείο δρα μια δύναμη, τότε το γινόμενο της μάζας του υλικού σημείου επί την επιτάχυνσή του ισούται με τη δύναμη.

Αξίωμα 2 ή **Τρίτος Νόμος του Νεύτωνα:** Αν δυο υλικά σημεία 1 και 2 αλληλεπιδρούν, τότε η δύναμη που ασκεί το 2 στο 1 είναι ίση και αντίθετη με αυτήν που ασκεί το 1 στο 2.

<u>Προσοχή</u>: Δεν ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα για εκτεταμένα στερεά σώματα. Επίσης, οι νόμοι του Νεύτωνα ισχύουν μόνο για παρατηρητές που είτε είναι ακίνητοι είτε κινούνται με σταθερή ταχύτητα. Αυτοί οι παρατηρητές λέγονται *αδρανειακοί* και το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούν λέγεται *αδρανειακό*. Θα δούμε παρακάτω τι συμβαίνει όταν ένα στερεό σώμα έχει διαστάσεις ή όταν ο παρατηρητής δεν είναι αδρανειακός. Ας μην ξεχνάμε, ότι ως όντα πάνω στη Γη, που περιστρέφεται περί τον άξονά της, <u>δεν είμαστε αδρανειακοί παρατηρητές</u>! Οι αδρανειακοί παρατηρητές είναι <u>νοητοί παρατηρητές</u>. Στο Κεφάλαιο 9 θα δούμε αρκετά «περίεργα» φαινόμενα που συμβαίνουν στη Γη διότι αυτή περιστρέφεται περί τον άξονά της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μονοδιάστατες κινήσεις

Το κύριο θέμα της Μηχανικής είναι η μελέτη της κίνησης σωμάτων όταν σ' αυτά δρουν δυνάμεις. Χάριν ευκολίας, πρώτα θα εξετάσομε την κίνηση ενός υλικού σημείου πάνω σε μια ευθεία γραμμή, δηλαδή πάνω σε έναν άξονα, ας πούμε τον άξονα x.

Ας θεωρήσομε υλικό σημείο μάζας m που κινείται πάνω στον άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης F. Μας δίνεται ότι κάποια δεδομένη στιγμή, ας πούμε $t=0$, το υλικό σημείο ήταν στη θέση x_0 και είχε ταχύτητα u_0. Θέλομε να βρούμε τη θέση του $x(t)$ για όλους τους επόμενους χρόνους, δηλαδή $t>0$.

<u>Σημείωση</u>: Σχεδόν σε όλα τα προβλήματα της Μηχανικής, που θα εξετάσομε σ' αυτό το μάθημα, θα μας δίνεται η δύναμη, η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα τού υλικού σημείου και θα μας ζητείται η θέση τού σημείου για όλους τους επόμενους χρόνους. Άλλωστε, με γνώση της θέσης τού υλικού σημείου σε κάθε χρονική στιγμή έχομε πλήρη γνώση της κίνησής του. Π.χ., για την ταχύτητά του αρκεί να παραγωγίσομε τη συνάρτηση τής θέσης του.

Για κίνηση πάνω στον άξονα x, η θέση του υλικού σημείου είναι μια συνάρτηση του χρόνου $x(t)$, η ταχύτητά του είναι η παράγωγος της θέσης του $u(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}=x'(t)$ και η επιτάχυνσή του είναι η παράγωγος της ταχύτητάς του ή η δεύτερη παράγωγος της θέσης του $a(t)=\dfrac{du(t)}{dt}=u'(t)=\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}=x''(t)$. Έτσι, ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα λέει

$$m\,a=F \tag{1.1}$$

ή

$$m\frac{du(t)}{dt}=F \tag{1.2}$$

ή

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=F\ . \tag{1.3}$$

Η δύναμη F δεν είναι απαραιτήτως σταθερή. Μπορεί να εξαρτάται από τον χρόνο, τη θέση τού υλικού σημείου, την ταχύτητά του και άλλα. Ας γράψομε λοιπόν $F(t,x,...)$. Έτσι, η εξίσωση (1.3), δηλαδή ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα, γίνεται

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=F(t,x,...) \tag{1.4}$$

Ό,τι θέλομε να μάθομε για την κίνηση του υλικού σημείου <u>πρέπει να το μάθομε</u> από την εξίσωση (1.4). Άρα, για να μάθομε τη θέση $x(t)$ του υλικού σημείου, πρέπει με κάποιο τρόπο να λύσομε την εξίσωση (1.4). Επειδή η εξίσωση (1.4) έχει διαφορικά, λέγεται *διαφορική εξίσωση*.

Σε αντίθεση με τις αλγεβρικές εξισώσεις, π.χ.

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0\,,$$

που έχει λύσεις τούς <u>αριθμούς</u>

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,,$$

η διαφορική εξίσωση (1.4) έχει λύσεις <u>συναρτήσεις</u> $x(t)$.

Με άλλα λόγια, η εξίσωση (1.4) μας λέει το εξής: Από όλες τις συναρτήσεις του κόσμου $x(t)$, θέλομε εκείνη που όταν την παραγωγίσομε δυο φορές ως προς τον χρόνο και την πολλαπλασιάσομε με τη μάζα m να μας κάνει τη δύναμη $F(t, x, ...)$.

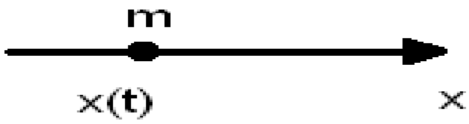
Άρα, <u>όλα</u> τα προβλήματα κίνησης υλικού σημείου πάνω στον άξονα x ανάγονται στην εξεύρεση της κατάλληλης $x(t)$. Συνεπώς, αρκεί να μάθομε πώς να βρίσκομε την κατάλληλη $x(t)$ για κάθε $F(t, x, ...)$ που μας δίνεται. Αυτό ακριβώς θα κάνομε παρακάτω.

1.1 Σταθερές δυνάμεις

Ας θεωρήσομε υλικό σημείο μάζας m που κινείται πάνω στον άξονα x υπό την επίδραση της σταθερής δύναμης F_0. Η δύναμη F_0 είναι αλγεβρική, δηλαδή μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Δεν χρειάζεται να ξέρομε το πρόσημό της. Το αποτέλεσμα που θα βρούμε θα ισχύει τόσο για θετικές όσο και για αρνητικές F_0.

Ας θεωρήσομε ότι την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$, το υλικό σημείο ήταν στη θέση x_0 και είχε ταχύτητα u_0. Κι αυτές είναι αλγεβρικές ποσότητες. Θέλομε να βρούμε τη θέση του υλικού σημείου για $t > 0$, δηλαδή θέλομε να βρούμε την $x(t)$.

Ζωγραφίζομε τον άξονα x με φορά προς τα δεξιά και θεωρούμε ότι την τυχούσα χρονική στιγμή t το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x(t)$.



Βάσει του Δεύτερου Νόμου του Νεύτωνα γράφομε

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F_0 \tag{1.5}$$

ή

$$m\frac{du(t)}{dt} = F_0 \tag{1.6}$$

ή

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{F_0}{m}. \tag{1.7}$$

Πολλαπλασιάζομε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης (1.7) με dt και έχομε

$$\frac{du(t)}{dt}dt = \frac{F_0}{m}dt. \tag{1.8}$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης (1.8) είναι το διαφορικό της συνάρτησης $u(t)$. Έτσι γράφομε

$$du = \frac{F_0}{m}dt. \tag{1.9}$$

Αριστερά είναι η εξαρτημένη μεταβλητή u και δεξιά η ανεξάρτητη μεταβλητή t. Ολοκληρώνομε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης (1.9). Το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους είναι u και το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι $\frac{F_0}{m}t$. Έτσι γράφομε

$$u(t) = \frac{F_0}{m}t + c_1, \tag{1.10}$$

όπου c_1 είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά της ολοκλήρωσης.

Η $u(t)$, που δίνεται από την εξίσωση (1.10), είναι λύση της εξίσωσης (1.6) και λέγεται γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.6). Αυτό μπορεί εύκολα να επαληθευτεί. Αν βάλομε τη λύση (1.10) στη διαφορική εξίσωση (1.6), βλέπομε ότι όντως την επαληθεύει, δηλαδή βρίσκομε ότι $F_0 = F_0$.

Η λύση (1.10) πρέπει να ισχύει για όλες τις χρονικές στιγμές t, άρα και για την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$. Θέτοντας $t = 0$ στην εξίσωση (1.10) έχομε $u(0) = \frac{F_0}{m}0 + c_1$. Αλλά, μας δόθηκε από τις αρχικές συνθήκες ότι $u(0) = u_0$. Συνεπώς, $c_1 = u_0$. Με άλλα λόγια, από την αρχική συνθήκη $u(0) = u_0$ προσδιορίσαμε την αυθαίρετη σταθερά c_1. Έτσι, η ζητούμενη ταχύτητα του υλικού σημείου σε κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ είναι

$$u(t) = \frac{F_0}{m}t + u_0 \tag{1.11}$$

Για $t = 0$, μας δίνει όντως ότι η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι u_0. Η λύση (1.11) είναι **η** λύση του δοθέντος προβλήματος με τη δοθείσα αρχική συνθήκη $u(0) = u_0$.

Λόγω του ότι η ταχύτητα είναι η χρονική παράγωγος της θέσης, η (1.11) γράφεται

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{F_0}{m}t + u_0. \tag{1.12}$$

Πολλαπλασιάζομε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης (1.12) με dt και έχομε

$$\frac{dx(t)}{dt}dt = \frac{F_0}{m}t\,dt + u_0 dt. \tag{1.13}$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης (1.13) είναι το διαφορικό της συνάρτησης $x(t)$. Έτσι γράφομε

$$dx = \frac{F_0}{m}t\,dt + u_0 dt. \tag{1.14}$$

Αριστερά είναι η εξαρτημένη μεταβλητή x και δεξιά η ανεξάρτητη μεταβλητή t. Ολοκληρώνομε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης (1.14). Το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους είναι x και το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι $\frac{F_0}{m}\frac{t^2}{2}+u_0 t$. Έτσι γράφομε

$$x(t)=\frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2+u_0 t+c_2\,, \tag{1.15}$$

όπου c_2 είναι μια αυθαίρετη <u>πραγματική</u> σταθερά της ολοκλήρωσης.

Η $x(t)$, που δίνεται από την εξίσωση (1.15), είναι <u>λύση</u> της εξίσωσης (1.5) και λέγεται <u>γενική λύση</u> της διαφορικής εξίσωσης (1.5). Αυτό μπορεί εύκολα να επαληθευτεί. Αν βάλομε τη λύση (1.15) στη διαφορική εξίσωση (1.5), βλέπομε ότι όντως την επαληθεύει, δηλαδή βρίσκομε ότι $F_0=F_0$.

Η λύση (1.15) πρέπει να ισχύει για όλες τις χρονικές στιγμές t, άρα και για την αρχική χρονική στιγμή $t=0$. Θέτοντας $t=0$ στην εξίσωση (1.15) έχομε $x(0)=\frac{1}{2}\frac{F_0}{m}0+c_1 0+c_2$. Αλλά, μας δόθηκε από τις αρχικές συνθήκες ότι $x(0)=x_0$. Συνεπώς, $c_2=x_0$. Με άλλα λόγια, από την αρχική συνθήκη $x(0)=x_0$ προσδιορίσαμε την αυθαίρετη σταθερά c_2. Έτσι, η ζητούμενη θέση του υλικού σημείου σε κάθε χρονική στιγμή $t\geq 0$ είναι

$$x(t)=\frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2+u_0 t+x_0\,. \tag{1.16}$$

Για $t=0$, μας δίνει όντως ότι η θέση του υλικού σημείου είναι x_0. Η λύση (1.16) είναι **η** λύση του δοθέντος προβλήματος με τις δοθείσες αρχικές συνθήκες $u(0)=u_0$ και $x(0)=x_0$.

<u>**Παρατήρηση**</u>: Τη διαφορική εξίσωση (1.7) τη λύσαμε με τη βοήθεια <u>αορίστου</u> ολοκληρώματος και την εισαγωγή αυθαιρέτου σταθεράς c_1, την οποία υπολογίσαμε από την αρχική συνθήκη $u(0)=u_0$. Εξίσου καλά θα μπορούσαμε να λύσομε τη διαφορική εξίσωση (1.7) με τη βοήθεια <u>ορισμένου</u> ολοκληρώματος. Τα όρια ολοκλήρωσης είναι, για μεν την ταχύτητα, από την αρχική ταχύτητα u_0 μέχρι την τυχούσα ταχύτητα u, για δε τον χρόνο, από την αρχική χρονική στιγμή 0 μέχρι την τυχούσα χρονική στιγμή t. Έτσι, ολοκληρώνοντας κατά μέλη την εξίσωση (1.9) έχομε

$$\int_{u_0}^{u} du=\int_0^t \frac{F_0}{m}dt \quad\Rightarrow\quad u-u_0=\frac{F_0}{m}(t-0) \quad\Rightarrow\quad u(t)=\frac{F_0}{m}t+u_0\,,$$

που είναι η εξίσωση (1.11). Ομοίως, από την εξίσωση (1.14) έχομε με ολοκλήρωση κατά μέλη

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t}\left(\frac{F_0}{m}tdt + u_0 dt\right) \Rightarrow x - x_0 = \frac{F_0}{m}\frac{t^2}{2} + u_0 t - 0 \Rightarrow x = \frac{F_0}{m}\frac{t^2}{2} + u_0 t + x_0,$$

που είναι η εξίσωση (1.16). Καλό θα ήταν, στα Παραδείγματα και τις Ασκήσεις αυτού του Κεφαλαίου, να εξοικειωθείτε και με τους δυο τρόπους.

Παράδειγμα 1.1: Υλικό σημείο μάζας m βρίσκεται στον κατακόρυφο άξονα z στη θέση $z = z_0$ και ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0$ την κίνησή του στον άξονα z με αρχική ταχύτητα $u = u_0$. Οι ποσότητες z_0 και u_0 είναι <u>αλγεβρικές</u>. Στο υλικό σημείο δρα η σταθερή δύναμη βαρύτητας της Γης, που έχει μέτρο $F = mg$.
Α) Να σχεδιασθεί ο κατακόρυφος άξονας z με φορά προς τα <u>κάτω</u> (δηλαδή η φορά του μοναδιαίου διανύτσματος $\hat{k}$ είναι προς τα κάτω) και να γραφεί η εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου.
Β) Να λυθεί η εξίσωση κίνησης για την ταχύτητα και τη θέση του υλικού σημείου στη γενική περίπτωσή της και να εφαρμοστούν σ' αυτήν οι αρχικές συνθήκες.
Γ) Τι αλλάζει στα ερωτήματα Α και Β αν πάρετε την αντίθετη φορά για τον άξονα z από αυτή που πήρατε στο ερώτημα Α;

<u>Λύση</u>: Α) Ζωγραφίζομε τον άξονα z με φορά προς τα κάτω και θεωρούμε ότι την <u>τυχούσα</u> χρονική στιγμή t το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $z(t)$.

Αυτό σημαίνει ότι η δύναμη της βαρύτητας, που είναι προς τα <u>κάτω</u>, είναι θετική. Έτσι, από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα γράφομε την εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου

$$m\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = mg. \qquad (1.17)$$

Β) Ακολουθώντας τα βήματα που κάναμε παραπάνω για τη σταθερή δύναμη F_0, γράφομε

$$\frac{du}{dt} = g \Rightarrow \frac{du}{dt}dt = g\,dt \Rightarrow du = g\,dt \Rightarrow \int du = g\int dt + c_1 \Rightarrow u(t) = g\,t + c_1, \qquad (1.18)$$

όπου c_1 είναι αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Αν θέλομε, μπορούμε να προσδιορίσομε τη σταθερά c_1 χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $u(0) = u_0$. Αυτό όμως δεν είναι απαραίτητο να γίνει τώρα.

Από τον ορισμό της ταχύτητας έχομε

$$\begin{aligned} &u(t) = \frac{dz}{dt} = g\,t + c_1 \Rightarrow \frac{dz}{dt}dt = g\,tdt + c_1 dt \Rightarrow dz = g\,tdt + c_1 dt \Rightarrow \\ &\qquad z = g\int tdt + c_1\int dt + c_2 \qquad \Rightarrow \qquad z(t) = \frac{1}{2}g\,t^2 + c_1 t + c_2, \end{aligned} \tag{1.19}$$

όπου c_2 είναι αυθαίρετη πραγματική σταθερά.

Αυτή είναι η γενική λύση της εξίσωσης κίνησης. Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες έχομε

$$u(0) = u_0 = g\,0 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = u_0\,, \tag{1.20}$$

$$z(0) = z_0 = \frac{1}{2}g\,0 + c_1 0 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = z_0\,. \tag{1.21}$$

Άρα **η** λύση του συγκεκριμένου προβλήματος με τις δοθείσες αρχικές συνθήκες, είναι

$$\begin{aligned} &z(t) = z_0 + u_0 t + \frac{1}{2}g\,t^2, \\ &u(t) = u_0 + g\,t\,. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Ω του θαύματος!!! Χρησιμοποιώντας το πρώτο Αξίωμα της Μηχανικής, δηλαδή τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα, βρήκαμε τις γνωστές μας σχέσεις για τη θέση και την ταχύτητα υλικού σημείου που κινείται πάνω στον κατακόρυφο άξονα z υπό την επίδραση σταθερού πεδίου βαρύτητας.

Οι εξισώσεις (1.22) περιγράφουν κατακόρυφη βολή με αρχική ταχύτητα u_0. Αν $u_0 > 0$, η βολή είναι προς τα κάτω, δηλαδή προς τη θετική φορά του άξονα z. Αν $u_0 < 0$, η βολή είναι προς τα πάνω, δηλαδή προς την αρνητική φορά του άξονα z.

Γ) Αν πάρομε τον άξονα z να έχει φορά προς τα πάνω, τότε επειδή η δύναμη του βάρους είναι προς τα κάτω, σημαίνει ότι η δύναμη είναι αρνητική, δηλαδή $-mg$! Έτσι, η εξίσωση κίνησης πρέπει να γραφεί ως

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} = -mg \tag{1.23}$$

και η λύση της για τις δοθείσες αρχικές συνθήκες είναι

$$
\begin{aligned}
z(t) &= z_0 + u_0 t - \frac{1}{2} g t^2 , \\
u(t) &= u_0 - g t.
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

<u>Παρατήρηση</u>: Τόσο η λύση (1.22) όσο και η λύση (1.24) είναι σωστές. Το πώς παίρνομε τη φορά του άξονα είναι <u>δική μας επιλογή</u>. Επιλέγομε τη φορά που μας βολεύει. **Πάντως, λύση άσκησης Μηχανικής, χωρίς να πούμε ποια είναι η φορά του άξονα, δεν νοείται.**

1.2 Δυνάμεις εξαρτώμενες από τον χρόνο

Ας θεωρήσομε υλικό σημείο μάζας m που κινείται πάνω στον άξονα x υπό την επίδραση της γενικής δύναμης $F = F(t)$. Συγκεκριμένα παραδείγματα θα δούμε πιο κάτω.

Ας θεωρήσομε ότι την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$, το υλικό σημείο ήταν στη θέση x_0 και είχε ταχύτητα u_0. Θέλομε να βρούμε τη θέση του υλικού σημείου για $t > 0$, δηλαδή θέλομε να βρούμε την $x(t)$.

Ζωγραφίζομε τον άξονα x με φορά προς τα δεξιά και θεωρούμε ότι την τυχούσα χρονική στιγμή t το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x(t)$.

Βάσει του Δεύτερου Νόμου του Νεύτωνα γράφομε

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(t) \tag{1.25}$$

ή

$$m\frac{du(t)}{dt} = F(t) \tag{1.26}$$

ή

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{m}F(t). \tag{1.27}$$

Πολλαπλασιάζομε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης (1.27) με dt και έχομε

$$\frac{du(t)}{dt}dt = \frac{1}{m}F(t)dt. \tag{1.28}$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης (1.28) είναι το διαφορικό της συνάρτησης $u(t)$. Έτσι γράφομε

$$du = \frac{1}{m}F(t)dt. \tag{1.29}$$

Αριστερά είναι η εξαρτημένη μεταβλητή u και δεξιά η ανεξάρτητη μεταβλητή t. Ολοκληρώνομε αμφότερα τα μέλη και έχομε

$$u(t) = \frac{1}{m}\int F(t)dt + c_1 = \frac{1}{m}G(t) + c_1, \tag{1.30}$$

όπου c_1 είναι αυθαίρετη πραγματική σταθερά και $G(t)$ είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της $F(t)$.

Λόγω του ότι η ταχύτητα είναι η χρονική παράγωγος της θέσης, η (1.30) γράφεται

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{m} G(t) + c_1 . \qquad (1.31)$$

Πολλαπλασιάζομε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης (1.31) με dt και έχομε

$$\frac{dx(t)}{dt} dt = \frac{1}{m} G(t)\, dt + c_1 dt . \qquad (1.32)$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης (1.32) είναι το <u>διαφορικό</u> της συνάρτησης $x(t)$.
Έτσι γράφομε

$$dx = \frac{1}{m} G(t) dt + c_1 dt . \qquad (1.33)$$

Αριστερά είναι η εξαρτημένη μεταβλητή x και δεξιά η ανεξάρτητη μεταβλητή t.
Ολοκληρώνομε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης (1.33). Το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους είναι x και το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι $\frac{1}{m}\int G(t)dt + c_1 t = \frac{1}{m} H(t) + c_1 t$, όπου γράψαμε ότι $H(t) = \int G(t)dt$. Έτσι γράφομε

$$x(t) = \frac{1}{m} H(t) + c_1 t + c_2 , \qquad (1.34)$$

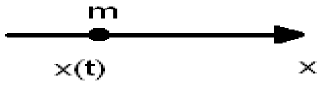
όπου c_2 είναι αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Οι σταθερές c_1 και c_2 μπορούν να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες $u(0) = u_0$ και $x(0) = x_0$.

<u>Παρατήρηση</u>: Πρέπει να έχει ήδη γίνει αντιληπτό ότι η γενική λύση της ταχύτητας, που προκύπτει από μια ολοκλήρωση της εξίσωσης κίνησης, έχει <u>μια</u> αυθαίρετη σταθερά ενώ η γενική λύση της θέσης, που προκύπτει από δυο ολοκληρώσεις της εξίσωσης κίνησης, έχει <u>δυο</u> αυθαίρετες σταθερές. Οι σταθερές αυτές προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Παρότι η γενική λύση (1.34) είναι μια, αυτή περιγράφει <u>άπειρα</u> (!) προβλήματα. Διαφορετικές αρχικές συνθήκες οδηγούν σε διαφορετικές λύσεις.

Παράδειγμα 1.2: Υλικό σημείο μάζας m κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης $F = F_0\,(t^2 / t_0^2)$, με $t \geq t_0$, όπου F_0, t_0 είναι <u>θετικές</u> σταθερές με μονάδες δύναμης και χρόνου αντιστοίχως. Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x = x_0 > 0$ και έχει ταχύτητα $u = u_0 > 0$.
Α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του υλικού σημείου για $t > t_0$.

Β) Να δείξετε ότι: 1) τα αποτελέσματά σας ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) όλοι οι όροι στα αποτελέσματά σας έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) στο όριο $t \to \infty$ τα αποτελέσματά σας δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.
Γ) Τι αλλάζει αν κάποιος σας πει ότι οι ποσότητες x_0, u_0 είναι αρνητικές;

Λύση:



Α) Η εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου είναι:

$$m\frac{du}{dt} = F_0\frac{t^2}{t_0^2}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{F_0}{m}\frac{t^2}{t_0^2} \Rightarrow du = \frac{F_0}{m}\frac{t^2}{t_0^2}dt$$

$$\Rightarrow \int du = \frac{F_0}{m}\int\frac{t^2}{t_0^2}dt + c_1 \Rightarrow u(t) = \frac{F_0}{m}\frac{t^3}{3t_0^2} + c_1 .$$

Η τελευταία γράφεται ως

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m}\frac{t^3}{3t_0^2} + c_1$$

$$\Rightarrow dx = \frac{F_0}{m}\frac{t^3}{3t_0^2}dt + c_1 dt \Rightarrow \int dx = \frac{F_0}{m}\int\frac{t^3}{3t_0^2}dt + c_1\int dt + c_2$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m}\frac{t^4}{12t_0^2} + c_1 t + c_2 ,$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Αυτή είναι η γενική λύση της εξίσωσης κίνησης. Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες έχομε

$$u_0 = u(t_0) = \frac{F_0 t_0^3}{m3t_0^2} + c_1 \Rightarrow c_1 = u_0 - \frac{F_0 t_0}{3m},$$

$$x_0 = x(t_0) = \frac{F_0 t_0^4}{m12t_0^2} + c_1 t_0 + c_2 \Rightarrow c_2 = x_0 - \frac{F_0 t_0^2}{12m} - \left(u_0 - \frac{F_0 t_0}{3m}\right)t_0 .$$

Άρα **η** λύση του συγκεκριμένου προβλήματος με τις δοθείσες αρχικές συνθήκες είναι

$$u(t) = u_0 + \frac{F_0}{3mt_0^2}(t^3 - t_0^3),$$

$$x(t) = x_0 + u_0(t - t_0) - \frac{F_0 t_0}{3m}(t - t_0) + \frac{F_0}{12mt_0^2}(t^4 - t_0^4).$$

Η λύση γράφτηκε με αυτόν τον τρόπο ώστε να φαίνεται αμέσως ότι για $t = t_0$ ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες.

Β) 1. Όντως για $t = t_0$ έχουμε $u(t_0) = u_0$ και $x(t_0) = x_0$.

2. Όλοι οι όροι στην έκφραση της ταχύτητας $u(t)$ έχουν διαστάσεις ταχύτητας διότι η δύναμη έχει διαστάσεις μάζα (M) $\cdot$ μήκος (L) / χρόνος (T)^2. Π.χ., ο όρος $\frac{F_0}{3mt_0^2}t^3$ έχει διαστάσεις $\frac{M\frac{L}{T^2}}{M\,T^2}T^3 = \frac{L}{T}$. Τα σύμβολα M, L, T προέρχονται από τις λέξεις *M*ass, *L*ength, *T*ime.

Ομοίως, όλοι οι όροι στην έκφραση της θέσης $x(t)$ έχουν διαστάσεις μήκους. Να ελέγξετε όλους τους όρους.

3. Επειδή η δύναμη τείνει στο $\pm\infty$ (ανάλογα με το πρόσημο της F_0) καθώς $t \to \infty$, περιμένομε ότι και η ταχύτητα του υλικού σημείου και η θέση του θα τείνουν στο $\pm\infty$. Όντως, για $F_0 > 0$, $u(t \to \infty) = \infty$ και $x(t \to \infty) = \infty$.

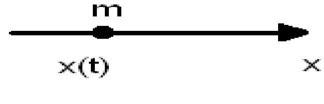
Γ) Τίποτε. Τα αποτελέσματα είναι αλγεβρικά. Αντικαθιστούμε ό,τι τιμές θέλομε στα x_0, u_0.

Παράδειγμα 1.3: Υλικό σημείο μάζας m κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης $F = F_0 t_0^2 / t^2$, με $t \geq t_0$, όπου F_0, t_0 είναι σταθερές με μονάδες δύναμης και χρόνου αντιστοίχως. Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x = x_0$ και έχει ταχύτητα $u = u_0$.

Α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του υλικού σημείου για $t > t_0$.

Β) Να δείξετε ότι: 1) τα αποτελέσματά σας ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) όλοι οι όροι στα αποτελέσματά σας έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) στο όριο $t \to \infty$ τα αποτελέσματά σας δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

Λύση



Α) Η εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου είναι:

$$m\frac{du}{dt}=F_0\frac{t_0^2}{t^2},$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{F_0}{m}\frac{t_0^2}{t^2}\Rightarrow du=\frac{F_0}{m}\frac{t_0^2}{t^2}dt\Rightarrow\int du=\frac{F_0t_0^2}{m}\int\frac{dt}{t^2}+c_1\Rightarrow u(t)=-\frac{F_0t_0^2}{m}\frac{1}{t}+c_1,$$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{F_0t_0^2}{m}\frac{1}{t}+c_1\Rightarrow dx=-\frac{F_0t_0^2}{m}\frac{1}{t}dt+c_1dt\Rightarrow\int dx=-\frac{F_0t_0^2}{m}\int\frac{dt}{t}+c_1\int dt+c_2\Rightarrow$$

$$x(t)=-\frac{F_0t_0^2}{m}\ln t+c_1t+c_2,\quad t>0$$

Αυτή είναι η <u>γενική λύση</u> της εξίσωσης κίνησης. Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$u_0=u(t_0)=-\frac{F_0t_0}{m}+c_1\Rightarrow c_1=u_0+\frac{F_0t_0}{m}$$

$$\Rightarrow x(t)=-\frac{F_0t_0^2}{m}\ln t+\left(u_0+\frac{F_0t_0}{m}\right)t+c_2,\quad t>0$$

$$x_0=x(t_0)=-\frac{F_0t_0^2}{m}\ln t_0+\left(u_0+\frac{F_0t_0}{m}\right)t_0+c_2\Rightarrow c_2=x_0+\frac{F_0t_0^2}{m}\ln t_0-\left(u_0+\frac{F_0t_0}{m}\right)t_0.$$

Άρα **η** λύση του συγκεκριμένου προβλήματος είναι:

$$u(t)=u_0+\frac{F_0t_0}{m}\left(1-\frac{t_0}{t}\right),\qquad t\geq t_0$$

$$x(t)=x_0+\frac{F_0t_0^2}{m}\ln\frac{t_0}{t}+\left(u_0+\frac{F_0t_0}{m}\right)(t-t_0),\qquad t\geq t_0$$

Β) 1. Όντως για $t=t_0$ έχουμε $u(t_0)=u_0$ και $x(t_0)=x_0$.

2. <u>Όλοι οι όροι</u> της ταχύτητας $u(t)$ έχουν διαστάσεις ταχύτητας. Εσείς να το επαληθεύσετε. Ομοίως, <u>όλοι οι όροι της θέσης</u> $x(t)$ έχουν διαστάσεις μήκους. Π.χ., ο όρος $\frac{F_0t_0}{m}t$ έχει διαστάσεις μήκους $\frac{M\frac{L}{T^2}T}{M}T=L$.

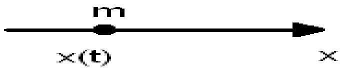
Η ποσότητα που λογαριθμίζεται <u>δεν έχει διαστάσεις</u>, είναι δηλαδή καθαρός αριθμός, όπως πρέπει.

3. Επειδή η δύναμη τείνει στο μηδέν σχετικά γρήγορα (ως $1/t^2$) καθώς $t\to\infty$, περιμένουμε ότι η ταχύτητα του υλικού σημείου θα τείνει σε μια οριακή τιμή και η θέση του θα τείνει στο άπειρο. Όντως, $u(t\to\infty)=u_0+\frac{F_0t_0}{m}$ και $x(t\to\infty)=\infty$. Στο αποτέλεσμα για το $x(t)$ ο γραμμικός όρος υπερισχύει του λογαριθμικού.

Παράδειγμα 1.3α: Υλικό σημείο μάζας m κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης $F=F_0(t/t_0)^{\alpha}$, με $t\geq t_1$, όπου F_0 και t_0, t_1 είναι θετικές

σταθερές με μονάδες δύναμης και χρόνου αντιστοίχως. Το α είναι πραγματική σταθερά. Τη χρονική στιγμή $t = t_1$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x = x_1$ και έχει ταχύτητα $u = u_1$.
Α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του υλικού σημείου για $t > t_1$.
Β) Να διερευνηθεί η συμπεριφορά της ταχύτητας για $t \to \infty$ για όλες τις τιμές του α.

Λύση:



Α) Η εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου είναι

$$m\frac{du}{dt} = F_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = \frac{F_0}{mt_0^{\alpha}}t^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{F_0}{mt_0^{\alpha}}t^{\alpha}dt .$$

Ολοκληρώνοντας από τις αρχικές συνθήκες μέχρι τις τυχούσες τιμές έχομε

$$\int_{u_1}^{u} du = \frac{F}{mt_0^{\alpha}}\int_{t_1}^{t} t^{\alpha}dt ,$$

που δίνει

$$u(t) - u_1 = \frac{F_0}{mt_0^{\alpha}} \cdot \begin{cases} \left.\dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_{t_1}^{t} & \text{για } \alpha \neq -1 \\ \left.\ln t\right|_{t_1}^{t} & \text{για } \alpha = -1 \end{cases} .$$

Έτσι, για $\alpha \neq -1$, **η** λύση είναι

$$u(t) = u_1 + \frac{F_0}{mt_0^{\alpha}(\alpha+1)}\left(t^{\alpha+1} - t_1^{\alpha+1}\right),$$

ενώ για $\alpha = -1$ **η** λύση είναι

$$u(t) = u_1 + \frac{F_0 t_0}{m}\ln\frac{t}{t_1} .$$

Β) Για $t \to \infty$ διακρίνομε τις εξής περιπτώσεις:

1) $\alpha \geq 0$. Η ταχύτητα πάει στο $+\infty$ και αυτό είναι αναμενόμενο, διότι η δύναμη είναι είτε σταθερή ($\alpha = 0$) είτε αυξάνεται με τον χρόνο ($\alpha > 0$). Έτσι περιμένομε την ταχύτητα να πάει στο άπειρο και τα μαθηματικά το επιβεβαιώνουν.

2) $\alpha < -1$. Στην περίπτωση αυτή η ταχύτητα πάει στην οριακή τιμή

$$u = u_1 - \frac{F_0}{m t_0^{\alpha}(\alpha+1)} t_1^{\alpha+1} > u_1 .$$

Για $\alpha < -1$, η δύναμη πάει ως $1/t^{|\alpha|}$ και για $|\alpha| > 1$ η δύναμη μηδενίζεται γρήγορα. Έτσι, όταν η δύναμη πάει γρήγορα στο μηδέν, η ταχύτητα πάει σε οριακή τιμή. Αν θέλετε, ζωγραφίστε τις συναρτήσεις $1/t^2$, $1/t^4$, $1/t^6$. Θα δείτε ότι μειώνονται πολύ γρήγορα με τον χρόνο. Όσο μεγαλύτερο είναι το $|\alpha|$, τόσο πιο γρήγορα πάει η συνάρτηση στο μηδέν για $t \to \infty$.

3) $\alpha = -1$. Η ταχύτητα πάει στο $+\infty$, αλλά πολύ αργά, διότι ο λογάριθμος μεταβάλλεται πολύ αργά με τον χρόνο. Για να το δείτε αυτό, θεωρήστε τιμές του χρόνου $t = 10, 10^3, 10^6, 10^9, \ldots$ και υπολογίστε τους αντίστοιχους λογαρίθμους. Ο λογάριθμος του χρόνου πάει κι αυτός στο άπειρο καθώς ο χρόνος πάει στο άπειρο, αλλά πολύ πιο αργά. Αν θέλετε, ζωγραφίστε τις συναρτήσεις t και $\ln t$ για $t \geq 1$. Και οι δυο πάνε στο $+\infty$ για $t \to \infty$, αλλά ο λογάριθμος πάει πολύ πιο αργά.

4) $-1 < \alpha < 0$. Αυτή η περίπτωση παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Η ταχύτητα πάει στο $+\infty$, **παρά το γεγονός ότι η δύναμη μειώνεται με τον χρόνο**. Ο λόγος είναι διότι η μείωση της δύναμης είναι πολύ αργή. Έτσι, η δύναμη κατορθώνει να αυξήσει την ταχύτητα και να την απειρίσει, παρά το γεγονός ότι η δύναμη συνεχώς μειώνεται. Αν θέλετε, ζωγραφίστε τις συναρτήσεις $1/t^{0,1}$, $1/t^{0,01}$, $1/t^{0,001}$. Θα δείτε ότι μειώνονται πολύ αργά με τον χρόνο. Όσο μικρότερο το $|\alpha|$, τόσο πιο αργά πάει η συνάρτηση στο μηδέν για $t \to \infty$.

Παράδειγμα 1.4: Υλικό σημείο μάζας m βρίσκεται ακίνητο στη θέση $x = 0$. Για $t \geq 0$ δρα πάνω του η δύναμη $\vec{F} = (F_0 t^2 / t_0^2)\hat{i}$ για $0 \leq t \leq t_0$ και $\vec{F} = -(F_0 t_0 / t)\hat{i}$ για $t_0 < t$, όπου F_0, t_0 είναι σταθερές με κατάλληλες μονάδες και $\hat{i}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα x.
Α) Να βρεθεί η ταχύτητα του υλικού σημείου για όλες τις τιμές του $t > 0$.
Β) Σταματά ποτέ το υλικό σημείο και αν ναι πότε;
Γ) Να δείξετε ότι: 1) τα αποτελέσματά σας ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) όλοι οι όροι στα αποτελέσματά σας έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) στο όριο $t \to \infty$ τα αποτελέσματά σας δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

Λύση:

Α) Η εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου είναι

$$m\frac{du}{dt} = F_0\frac{t^2}{t_0^2}, \qquad 0 \le t \le t_0$$

$$m\frac{du}{dt} = -F_0\frac{t_0}{t}, \qquad t_0 < t$$

Πρώτα θα λύσομε την εξίσωση κίνησης για $0 \le t \le t_0$.

$$\frac{du}{dt} = \frac{F_0}{m}\frac{t^2}{t_0^2} \Rightarrow du = \frac{F_0}{m}\frac{t^2}{t_0^2}dt \Rightarrow \int du = \frac{F_0}{mt_0^2}\int t^2 dt + c_1 \Rightarrow u(t) = \frac{F_0}{mt_0^2}\frac{t^3}{3} + c_1,$$

όπου c_1 είναι αυθαίρετη <u>πραγματική</u> σταθερά. Αυτή είναι η <u>γενική λύση</u> της εξίσωσης κίνησης για $0 \le t \le t_0$. Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες έχομε $u(0) = c_1 = 0$. Άρα **η** λύση του συγκεκριμένου προβλήματος για $0 \le t \le t_0$ είναι $u(t) = \frac{F_0}{3mt_0^2}t^3$. Παρατηρούμε ότι

$$u(t_0) = \frac{F_0 t_0}{3m}.$$

Αυτή είναι η <u>αρχική ταχύτητα</u> για τη μελέτη της κίνησης του υλικού σημείου για $t > t_0$.

Τώρα θα λύσουμε την εξίσωση κίνησης για $t > t_0$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{F_0}{m}\frac{t_0}{t} \Rightarrow du = -\frac{F_0}{m}\frac{t_0}{t}dt \Rightarrow \int du = -\frac{F_0}{m}t_0\int\frac{dt}{t} + A \Rightarrow u(t) = -\frac{F_0 t_0}{m}\ln t + A,$$

όπου A είναι αυθαίρετη <u>πραγματική</u> σταθερά. Αυτή είναι η <u>γενική</u> λύση της εξίσωσης κίνησης για $t > t_0$. Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες (δηλαδή για $t = t_0$) έχομε

$$u(t_0) = -\frac{F_0 t_0}{m}\ln t_0 + A = \frac{F_0 t_0}{3m} \quad \Rightarrow A = \frac{F_0 t_0}{3m} + \frac{F_0 t_0}{m}\ln t_0 \quad .$$

Άρα **η** λύση του συγκεκριμένου προβλήματος για $t > t_0$ είναι:

$$u(t) = \frac{F_0 t_0}{m}\left(\ln\frac{t_0}{t} + \frac{1}{3}\right).$$

Β) Από τη λύση του προβλήματος για $t > t_0$ παρατηρούμε ότι για να γίνει η ταχύτητα μηδέν πρέπει

$$\frac{F_0 t_0}{m}\ln\frac{t_0}{t} + \frac{F_0 t_0}{3m} = 0 \qquad \text{ή} \qquad \ln\frac{t_0}{t} = -\frac{1}{3} \qquad \text{ή} \qquad t = e^{1/3}t_0.$$

Γ) 1. Οι αρχικές συνθήκες ικανοποιούνται διότι $u(0)=0$ και $u(t_0)=F_0 t_0/3m$.

2. Όλοι οι όροι της ταχύτητας έχουν όντως διαστάσεις ταχύτητας. Εσείς να το επαληθεύσετε.

3. Για $t\to\infty$, $u(t\to\infty)=-\infty$, διότι η δύναμη τείνει στο μηδέν <u>με αργό τρόπο</u>, δηλαδή $F\propto 1/t$ (βλ. Παράδειγμα 1.3α για $\alpha=-1$).

Άσκηση 1.1: Υλικό σημείο μάζας m κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης $F=F_0 e^{-t/t_0}$, όπου F_0, t_0 είναι <u>θετικές</u> σταθερές με μονάδες δύναμης και χρόνου αντιστοίχως. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x=x_0$ και έχει ταχύτητα $u=u_0$.

Α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του υλικού σημείου για $t>0$.

Β) Να δείξετε ότι: 1) τα αποτελέσματά σας ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) <u>όλοι οι όροι</u> στα αποτελέσματά σας έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) στο όριο $t\to\infty$ τα αποτελέσματά σας δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

<u>Απάντηση</u>:

Α)

$$u(t)=u_0+\frac{F_0 t_0}{m}\left(1-e^{-t/t_0}\right)$$

$$x(t)=x_0-\frac{F_0 t_0^2}{m}\left(1-e^{-t/t_0}\right)+\left(u_0+\frac{F_0 t_0}{m}\right)t$$

Β3)

$$u(t\to\infty)=u_0+\frac{F_0 t_0}{m}$$

$$x(t\to\infty)=\infty\,.$$

Άσκηση 1.2: Υλικό σημείο μάζας m κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης $F=F_0\,(t^2/t_0^2+t_0^2/t^2)$, με $t\geq t_0$, όπου F_0, t_0 είναι <u>θετικές</u> σταθερές με μονάδες δύναμης και χρόνου αντιστοίχως. Τη χρονική στιγμή $t=t_0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x=x_0>0$ και έχει ταχύτητα $u=u_0>0$.

Α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του υλικού σημείου για $t>t_0$.

Β) Να δείξετε ότι: 1) τα αποτελέσματά σας ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) <u>όλοι οι όροι</u> στα αποτελέσματά σας έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) στο όριο $t\to\infty$ τα αποτελέσματά σας δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

Γ) Τι αλλάζει αν κάποιος σας πει ότι οι ποσότητες x_0, u_0 είναι αρνητικές;

<u>Απάντηση</u>:

Α)

$$u(t)=u_0+\frac{F_0}{3mt_0^2}(t^3-t_0^3)+\frac{F_0 t_0^2}{m}\left(\frac{1}{t_0}-\frac{1}{t}\right),$$

$$x(t)=x_0+u_0(t-t_0)+\frac{2F_0 t_0}{3m}(t-t_0)+\frac{F_0}{12mt_0^2}(t^4-t_0^4)+\frac{F_0 t_0^2}{m}\ln\frac{t_0}{t}.$$

Η λύση γράφτηκε με αυτόν τον τρόπο ώστε να φαίνεται αμέσως ότι για $t = t_0$ ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες.

Άσκηση 1.3: Υλικό σημείο μάζας m κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης $F = F_0\,(t^2/t_0^2 + e^{-t/t_0})$, με $t \geq 0$, όπου F_0, t_0 είναι θετικές σταθερές με μονάδες δύναμης και χρόνου αντιστοίχως. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και έχει ταχύτητα $u = 0$.
Α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του υλικού σημείου για $t > 0$.
Β) Να δείξετε ότι: 1) τα αποτελέσματά σας ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) όλοι οι όροι στα αποτελέσματά σας έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) στο όριο $t \to \infty$ τα αποτελέσματά σας δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

Απάντηση:

$$u(t) = \frac{F_0 t_0}{m}\left(\frac{t^3}{3t_0^3} - e^{-t/t_0} + 1\right),$$

$$x(t) = \frac{F_0 t_0^2}{m}\left(\frac{t^4}{12t_0^4} + e^{-t/t_0} + \frac{t}{t_0} - 1\right).$$

Η λύση γράφτηκε με αυτόν τον τρόπο ώστε να φαίνεται αμέσως ότι α) για $t = 0$ ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες και β) οι όροι μέσα στις παρενθέσεις είναι αδιάστατοι.

Άσκηση 1.4: Υλικό σημείο μάζας m κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης $F = F_0 \sin(\omega_0 t)$, όπου F_0, ω_0 είναι θετικές σταθερές με μονάδες δύναμης και κυκλικής συχνότητας αντιστοίχως. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x = x_0$ και έχει ταχύτητα $u = u_0 > 0$.
Α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του υλικού σημείου για $t > 0$.
Β) Να δείξετε ότι: 1) τα αποτελέσματά σας ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) όλοι οι όροι στα αποτελέσματά σας έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) στο όριο $t \to \infty$ τα αποτελέσματά σας δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

Απάντηση:

$$u(t) = u_0 + \frac{F_0}{m\omega_0}\left(1 - \cos(\omega_0 t)\right).$$

$$x(t) = x_0 + u_0 t + \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left(\omega_0 t - \sin(\omega_0 t)\right).$$

Και εδώ η λύση γράφτηκε με τέτοιο τρόπο ώστε οι όροι στην παρένθεση να είναι αδιάστατοι.

Β3) Η δύναμη είναι περιοδικά μεταβαλλόμενη (στην προκειμένη περίπτωση η δύναμη είναι αρμονική συνάρτηση). Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα θα είναι η αρχική

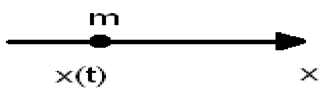
u_0 συν μια <u>αρμονικά</u> μεταβαλλόμενη ποσότητα. Από τη λύση βλέπομε ότι η αρμονικά μεταβαλλόμενη ποσότητα βρίσκεται πάντοτε μεταξύ των τιμών 0 και $2F_0/(m\omega_0)$. Έτσι η ταχύτητα του υλικού σημείου μεταβάλλεται αρμονικά μεταξύ των τιμών u_0 και $u_0 + 2F_0/(m\omega_0)$. Με άλλα λόγια, το υλικό σημείο έχει <u>μεταφορική ταχύτητα</u> $u_0 + F_0/(m\omega_0)$ και επιπλέον <u>αρμονική ταχύτητα</u> με πλάτος $F_0/(m\omega_0)$. Η θέση όμως του υλικού σημείου για $t \to \infty$ απειρίζεται διότι ανά πάσα στιγμή το υλικό σημείο κινείται με ταχύτητα <u>τουλάχιστον</u> u_0.

1.3 Δυνάμεις εξαρτώμενες από την ταχύτητα

Ας θεωρήσομε υλικό σημείο μάζας m που κινείται πάνω στον άξονα x υπό την επίδραση της γενικής δύναμης $F = F(u)$, όπου u είναι η στιγμιαία ταχύτητα του υλικού σημείου. Συγκεκριμένα παραδείγματα θα δούμε πιο κάτω.

Ας θεωρήσομε ότι την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$, το υλικό σημείο ήταν στη θέση x_0 και είχε ταχύτητα u_0. Θέλομε να βρούμε την ταχύτητα και τη θέση του υλικού σημείου για $t > 0$.

Ζωγραφίζομε τον άξονα x με φορά προς τα δεξιά και θεωρούμε ότι την τυχούσα χρονική στιγμή t το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x(t)$.



Βάσει του Δεύτερου Νόμου του Νεύτωνα γράφομε

$$m\frac{du}{dt} = F(u) \tag{1.35}$$

ή

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{m}F(u). \tag{1.36}$$

Πολλαπλασιάζομε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης (1.36) με dt και έχομε

$$du = \frac{1}{m}F(u)dt. \tag{1.37}$$

Διαιρούμε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης (1.37) με $F(u)$ και έχομε

$$\frac{du}{F(u)} = \frac{1}{m}dt. \tag{1.38}$$

Ο λόγος που το κάναμε αυτό είναι για να χωρίσομε τις μεταβλητές. Αριστερά είναι η εξαρτημένη μεταβλητή u και δεξιά η ανεξάρτητη μεταβλητή t.

Ολοκληρώνομε αμφότερα τα μέλη της (1.38) και έχομε

$$\int\frac{du}{F(u)} = \frac{1}{m}\int dt + c_1 . \tag{1.39}$$

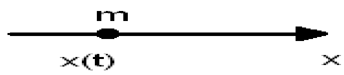
Το αριστερό μέλος της (1.39) είναι μια συνάρτηση της ταχύτητας, ας πούμε $I(u)$. Έτσι γράφομε

$$I(u) = \frac{t}{m} + c_1 \qquad (1.40)$$

και, αν η $I(u)$ δεν είναι πολύπλοκη συνάρτηση, λύνομε την (1.40) ως προς u συναρτήσει του t. Μετά συνεχίζομε όπως στα προηγούμενα (βλ. εξισώσεις 1.12 έως 1.15).

Παράδειγμα 1.5: Μια βάρκα (θεωρούμενη σαν υλικό σημείο) μάζας m σύρεται σε μια λίμνη σε ευθεία γραμμή (ας πούμε τον άξονα x) υπό την επίδραση μιας σταθερής δύναμης $F_0 > 0$. Η τριβή του νερού είναι μια δύναμη που **αντιτίθεται** στην κίνηση και είναι ανάλογη της ταχύτητας της βάρκας με σταθερά αναλογίας $R > 0$.
Α) Να σχεδιάσετε τον οριζόντιο άξονα x με όποια φορά θέλετε και να γράψετε την εξίσωση κίνησης της βάρκας.
Β) Να βρείτε την ταχύτητα της βάρκας για $t > 0$, αν για $t = 0$ η βάρκα ήταν ακίνητη.
Γ) Να δείξετε ότι: 1) τα αποτελέσματά σας ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) <u>όλοι οι όροι</u> στα αποτελέσματά σας έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) στο όριο $t \to \infty$ τα αποτελέσματά σας δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

<u>Λύση</u>: Α)



Η εξίσωση κίνησης της βάρκας είναι $m\dfrac{du}{dt} = F_0 - Ru$.

Β)

$$\frac{du}{dt} = \frac{F_0}{m} - \frac{R}{m}u \Rightarrow \frac{du}{\frac{F_0}{m} - \frac{R}{m}u} = dt \Rightarrow \frac{m}{F_0}\frac{du}{1 - \frac{Ru}{F_0}} = dt \Rightarrow \frac{m}{F_0}\int \frac{du}{1 - \frac{Ru}{F_0}} = \int dt + c,$$

όπου c είναι πραγματική σταθερά. Συνεπώς,

$$-\frac{m}{R}\ln\left|1 - \frac{Ru}{F_0}\right| = t + c \Rightarrow \ln\left|1 - \frac{Ru}{F_0}\right| = -\frac{R}{m}t - \frac{R}{m}c \Rightarrow \left|1 - \frac{Ru}{F_0}\right| = e^{-\frac{R}{m}t}e^{-\frac{R}{m}c} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{Ru}{F_0} = c_1 e^{-\frac{R}{m}t},$$

όπου τη <u>θετική</u> σταθερά $e^{-Rc/m}$ με <u>αυθαίρετο</u> πρόσημο τη γράψαμε ως πραγματική σταθερά c_1. Με άλλα λόγια, η αυθαίρετη σταθερά c_1 είναι ίση με $\pm e^{-\frac{R}{m}c}$ και την εισαγάγαμε χάριν ευκολίας. Συνεπώς,

$$u(t)=\frac{F_0}{R}\left(1-c_1 e^{-\frac{R}{m}t}\right).$$

Αυτή είναι η <u>γενική λύση</u> για την ταχύτητα. Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες έχομε: $u(0)=\frac{F_0}{R}(1-c_1)=0 \quad \Rightarrow \quad c_1=1$.

Άρα **η** λύση του συγκεκριμένου προβλήματος είναι

$$u(t)=\frac{F_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{m}t}\right),\ t\geq 0.$$

Γ) 1. Όντως, για $t=0$ έχομε $u(0)=0$.

2. Η δύναμη τριβής είναι $F_{\tau\rho}=-Ru$. Άρα οι διαστάσεις του R είναι δύναμη/ταχύτητα, δηλαδή $\frac{M\frac{L}{T^2}}{\frac{L}{T}}=\frac{M}{T}$. Με αυτές τις διαστάσεις, παρατηρούμε ότι το εκθετικό είναι αδιάστατο ενώ το F_0/R έχει διαστάσεις ταχύτητας. Έτσι, όλοι οι όροι της $u(t)$ έχουν διαστάσεις ταχύτητας, δηλαδή L/T.

3. Για $t\to\infty$, $u(t\to\infty)=F_0/R$. Αυτό είναι αναμενόμενο, διότι λόγω τριβής η βάρκα αποκτά οριακή ταχύτητα.

<u>Παρατήρηση</u>: Η άσκηση δεν μας το ζητάει, αλλά αν θέλαμε να υπολογίσομε τη θέση της βάρκας ως συνάρτηση του χρόνου θα γράφαμε

$$\frac{dx}{dt}=\frac{F_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{m}t}\right)$$

και θα προχωρούσαμε όπως στα παραπάνω (βλ. εξισώσεις 1.12 έως 1.15).

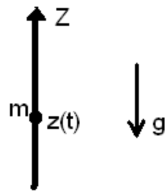
Παράδειγμα 1.6: Ένας αλεξιπτωτιστής (θεωρούμενος σαν υλικό σημείο) μάζας m πέφτει κατακόρυφα από ύψος h. Θεωρήστε, χάριν ευκολίας, ότι ο αλεξιπτωτιστής ήταν αρχικά ($t=0$) ακίνητος. Η τριβή του αέρα είναι μια δύναμη που **αντιτίθεται** στην κίνηση και είναι ανάλογη της ταχύτητας του αλεξιπτωτιστή με σταθερά αναλογίας $R>0$.

Α) Να σχεδιάσετε τον κατακόρυφο άξονα z με όποια φορά θέλετε και να γράψετε την εξίσωση κίνησης του αλεξιπτωτιστή.

Β) Να βρείτε την ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή για $t>0$.

Γ) Να δείξετε ότι: 1) τα αποτελέσματά σας ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, 2) <u>όλοι οι όροι</u> στα αποτελέσματά σας έχουν τις σωστές διαστάσεις και 3) στο όριο $t\to\infty$ τα αποτελέσματά σας δίνουν λογικά και αναμενόμενα αποτελέσματα.

Λύση: Α) Ας θεωρήσομε τον άξονα z προς τα <u>πάνω</u>. Δείτε το επόμενο παράδειγμα για άξονα z προς τα <u>κάτω</u>.



Η εξίσωση κίνησης του αλεξιπτωτιστή είναι $m\frac{du}{dt} = -mg - Ru$. Το βάρος του αλεξιπτωτιστή είναι προς τα <u>κάτω</u>, γι' αυτό το γράψαμε ως $-mg$. Η τριβή του αέρα αντιτίθεται στην κίνηση, δηλαδή έχει πρόσημο <u>αντίθετο της ταχύτητας</u>, γι' αυτό γράψαμε $-Ru$, χωρίς να μας νοιάζει αν η ταχύτητα είναι θετική ή αρνητική.

Β)

$$\frac{du}{dt} = -g - \frac{R}{m}u \Rightarrow \frac{du}{\frac{R}{m}u + g} = -dt \Rightarrow \frac{1}{g}\frac{du}{\frac{Ru}{mg}+1} = -dt \Rightarrow \frac{1}{g}\int \frac{du}{\frac{Ru}{mg}+1} = -\int dt + c \Rightarrow$$

$$\frac{m}{R}\ln\left|\frac{Ru}{mg}+1\right| = -t + c \Rightarrow \ln\left|\frac{Ru}{mg}+1\right| = -\frac{R}{m}t + \frac{R}{m}c \Rightarrow \left|\frac{Ru}{mg}+1\right| = e^{-\frac{R}{m}t}e^{\frac{R}{m}c} \Rightarrow$$

$$\frac{Ru}{mg} + 1 = c_1 e^{-\frac{R}{m}t} \Rightarrow u(t) = \frac{mg}{R}\left(c_1 e^{-\frac{R}{m}t} - 1\right),$$

όπου c, c_1 είναι αυθαίρετες <u>πραγματικές</u> σταθερές. Αυτή είναι η <u>γενική λύση</u> για την ταχύτητα. Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη έχομε:

$$0 = u(0) = \frac{mg}{R}(c_1 - 1) \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1.$$

Άρα **η** λύση του συγκεκριμένου προβλήματος είναι

$$u(t) = \frac{mg}{R}\left(e^{-\frac{t}{m/R}} - 1\right),\ t \geq 0.$$

Το m/R στον εκθέτη έχει διαστάσεις χρόνου (διότι από τη σχέση $F_{\tau\rho} = -Ru$ οι διαστάσεις του R είναι δύναμη/ταχύτητα, δηλαδή Μ/Τ) και λέγεται <u>χαρακτηριστικός χρόνος</u>. Ο εκθέτης γράφτηκε με αυτόν τον τρόπο ώστε να φαίνεται αμέσως ότι είναι αδιάστατος.

Γ) 1. Όντως, για $t = 0$ έχομε $u(0) = 0$.
2. Το mg/R έχει διαστάσεις ταχύτητας. Να το ελέγξετε. Οι όροι στην παρένθεση δεν έχουν διαστάσεις.
3. Αν το h είναι αρκετά μεγάλο, η πτώση του αλεξιπτωτιστή θα διαρκέσει πολύ χρόνο. Άρα εξετάζομε τη λύση για $t \to \infty$. Βλέπομε ότι για $t \to \infty$, έχομε $u(t \to \infty) = -mg/R$. Αυτό είναι αναμενόμενο, διότι η δύναμη τριβής μεγαλώνει κατά μέτρο όσο μεγαλώνει η ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή. Μετά από πάροδο αρκετού χρόνου (δηλαδή χρόνου αρκετά μεγαλύτερου από τον <u>*χαρακτηριστικό χρόνο*</u>

m/R, ώστε το εκθετικό $e^{-\frac{t}{m/R}}$ να τείνει στο μηδέν), η δύναμη τριβής εξισορροπεί τη βαρύτητα Έτσι. ο αλεξιπτωτιστής μετά την πάροδο χρόνου αρκετά μεγαλύτερου από τον χαρακτηριστικό χρόνο αποκτά οριακή ταχύτητα. Η οριακή αυτή ταχύτητα είναι αρνητική, διότι ο αλεξιπτωτιστής κινείται προς τα κάτω ενώ η θετική φορά του άξονα είναι προς τα πάνω.

Παράδειγμα 1.7: Υλικό σημείο μάζας m βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα u_0. Στο υλικό σημείο δρουν η σταθερή βαρύτητα και η τριβή του αέρα που είναι ανάλογη της ταχύτητας του υλικού σημείου με σταθερά αναλογίας $R > 0$. Να βρεθεί η ταχύτητα του υλικού σημείου για $t > 0$.

Λύση: Ας θεωρήσομε σ' αυτή την άσκηση τον άξονα z προς τα κάτω.

Η εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου είναι $m\frac{du}{dt} = mg - Ru$. Το βάρος του υλικού σημείου είναι προς τα κάτω, γι' αυτό το γράψαμε ως $+mg$. Η τριβή του αέρα αντιτίθεται στην κίνηση, δηλαδή έχει πρόσημο αντίθετο της ταχύτητας, γι' αυτό γράψαμε $-Ru$, χωρίς να μας νοιάζει αν η ταχύτητα είναι θετική ή αρνητική, δηλαδή αν το υλικό σημείο κινείται προς τα κάτω ή προς τα πάνω.

$$\frac{du}{dt} = g - \frac{R}{m}u \Rightarrow \frac{du}{\frac{R}{m}u - g} = -dt \Rightarrow \frac{1}{g}\frac{du}{\frac{Ru}{mg} - 1} = -dt \Rightarrow \frac{1}{g}\int \frac{du}{\frac{Ru}{mg} - 1} = -\int dt + c \Rightarrow$$

$$\frac{m}{R}\ln\left|\frac{Ru}{mg} - 1\right| = -t + c \Rightarrow \ln\left|\frac{Ru}{mg} - 1\right| = -\frac{R}{m}t + \frac{R}{m}c \Rightarrow \left|\frac{Ru}{mg} - 1\right| = e^{-\frac{R}{m}t} e^{\frac{R}{m}c} \Rightarrow$$

$$\frac{Ru}{mg} - 1 = c_1 e^{-\frac{R}{m}t} \Rightarrow u(t) = \frac{mg}{R}\left(1 + c_1 e^{-\frac{R}{m}t}\right),$$

όπου c, c_1 είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Αυτή είναι η γενική λύση για την ταχύτητα. Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη έχομε:

$$u_0 = u(0) = \frac{mg}{R}(1 + c_1) \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{Ru_0}{mg} - 1.$$

Άρα **η** λύση του συγκεκριμένου προβλήματος είναι

$$u(t) = \frac{mg}{R} + \left(u_0 - \frac{mg}{R}\right) e^{-\frac{t}{m/R}}, \ t \geq 0 .$$

Για $t \to \infty$, $u(t \to \infty) = mg / R$. Αυτό είναι αναμενόμενο, διότι λόγω τριβής το υλικό σημείο αποκτά οριακή ταχύτητα. Η οριακή αυτή ταχύτητα είναι θετική διότι, παρά το ότι το υλικό σημείο είχε αρχική ταχύτητα $u_0 < 0$ (δηλαδή προς τα <u>πάνω</u>), κάποια στιγμή σταμάτησε και γύρισε προς τα <u>κάτω</u>, δηλαδή προς τα θετικά του άξονα z.

Παράδειγμα 1.8: Ένα σημειακό βλήμα μάζας m βάλλεται κατακόρυφα από κάποιο ύψος προς τα <u>κάτω</u> με αρχική ταχύτητα u_0. Στο βλήμα δρα το σταθερό πεδίο βαρύτητας και μια δύναμη τριβής του αέρα που αντιτίθεται στην κίνηση και είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας του βλήματος. Η σταθερά αναλογίας είναι $\beta > 0$.

Α) Να σχεδιασθεί ο κατακόρυφος άξονας z με όποια φορά θέλετε και να γραφεί η εξίσωση κίνησης του βλήματος.

Β) Να βρεθεί η ταχύτητα του βλήματος ως συνάρτηση του χρόνου.

<u>Λύση</u>: Α) Ας θεωρήσομε ότι ο άξονας z είναι προς τα <u>κάτω</u>. Η εξίσωση κίνησης του βλήματος είναι

$$m\frac{du}{dt} = mg - \beta u^2 .$$

Β) Η εξίσωση κίνησης γράφεται ως

$$\frac{du}{dt} = g - \frac{\beta}{m}u^2 \ \Rightarrow \ \frac{du}{g - \frac{\beta}{m}u^2} = dt \ \Rightarrow \ \int \frac{du}{g - \frac{\beta}{m}u^2} = t + c \ \Rightarrow$$

$$\frac{m}{\beta}\int \frac{du}{\frac{mg}{\beta} - u^2} = t + c ,$$

όπου c είναι αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Χρησιμοποιώντας Πίνακα Ολοκληρωμάτων βλέπομε ότι

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| .$$

Στην περίπτωσή μας έχομε $a = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}$. Έτσι γράφομε ως συνέχεια της ολοκλήρωσης της εξίσωσης κίνησης

$$\frac{m}{\beta}\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| = t + c \ \Rightarrow \ \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| = \frac{2a\beta}{m}t + c_1 \ \Rightarrow \ \left|\frac{u+a}{u-a}\right| = e^{2a\beta t/m}e^{c_1} \ \Rightarrow$$

$$\frac{u+a}{u-a}=Ce^{2a\beta t/m} \quad \Rightarrow u+a=(u-a)Ce^{2a\beta t/m} \quad \Rightarrow \quad u\left(1-Ce^{2a\beta t/m}\right)=-a\left(Ce^{2a\beta t/m}+1\right) \quad \Rightarrow$$

$$u(t)=a\frac{Ce^{2a\beta t/m}+1}{Ce^{2a\beta t/m}-1}=a\frac{C+e^{-2a\beta t/m}}{C-e^{-2a\beta t/m}}.$$

Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη ότι $u(0)=u_0$, έχομε $u(0)=u_0=-a\dfrac{C+1}{1-C}$, από την οποία παίρνομε

$$C=\frac{u_0+a}{u_0-a}.$$

Για $t\to\infty$ βρίσκομε ότι $u(t\to\infty)=a=\sqrt{\dfrac{mg}{\beta}}$. Με άλλα λόγια, η ταχύτητα αποκτά οριακή τιμή λόγω της δύναμης τριβής. Το a έχει διαστάσεις ταχύτητας.

<u>Παρατήρηση:</u> Τυχόν δύσκολα ολοκληρώματα στα διαγωνίσματα θα δίνονται.

Άσκηση 1.5: Ένας πύραυλος, που τον θεωρούμε σαν υλικό σημείο σταθερής μάζας m, εκτοξεύεται από ηρεμία και από μια πλατφόρμα που βρίσκεται σε ύψος z_0 κατακόρυφα προς τα πάνω (δηλαδή προς τον θετικό άξονα z) με δύναμη $F=F_0\dfrac{u_0}{u}$, όπου F_0 είναι θετική σταθερά με διαστάσεις δύναμης, u_0 είναι θετική σταθερά με διαστάσεις ταχύτητας και u είναι η στιγμιαία ταχύτητα του πυραύλου. Χάριν ευκολίας θεωρήστε ότι η δύναμη της βαρύτητας είναι αμελητέα. Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του πυραύλου την τυχούσα χρονική στιγμή μετά την εκτόξευση.

Απάντηση: $u(t)=\sqrt{\dfrac{2F_0u_0t}{m}}$, $\qquad z(t)=z_0+\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2F_0u_0}{m}}\,t^{3/2}$

Άσκηση 1.6: Ένας πύραυλος, που τον θεωρούμε σαν υλικό σημείο σταθερής μάζας m, εκτοξεύεται από ηρεμία και από μια πλατφόρμα που βρίσκεται σε ύψος z_0 κατακόρυφα προς τα πάνω (δηλαδή προς τον θετικό άξονα z) με δύναμη $F=F_0\dfrac{u_0}{u}$, όπου F_0 είναι θετική σταθερά με διαστάσεις δύναμης, u_0 είναι θετική σταθερά με διαστάσεις ταχύτητας και u είναι η στιγμιαία ταχύτητα του πυραύλου. Θεωρήστε σταθερό πεδίο βαρύτητας. Να βρεθεί η ταχύτητα του πυραύλου την τυχούσα χρονική στιγμή μετά την εκτόξευση. Δίνεται ότι

$$\int\frac{w\,dw}{aw+b}=\frac{w}{a}-\frac{b}{a^2}\ln|aw+b|.$$

Όπως θα δείτε, υπάρχουν και απλά προβλήματα που δεν μπορούμε να βρούμε αναλυτικά την $u(t)$.

Άσκηση 1.7: Ένα υλικό σημείο μάζας m κινείται στον άξονα x. Τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στη θέση $x=0$ και έχει ταχύτητα $u=u_0$, $u_0>0$. Για $t>0$ στο υλικό σημείο δρα μόνο μια δύναμη τριβής που αντιτίθεται στην κίνησή του και έχει μέτρο ανάλογο του τετραγώνου της στιγμιαίας ταχύτητάς του με σταθερά αναλογίας $b>0$.

Α) Να γραφεί η εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου.

Β) Να βρεθεί η ταχύτητά του για $t>0$.

Γ) Να βρεθεί η θέση του για $t>0$.

Δ) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειάς του.

Ε) Πόσος χρόνος απαιτείται για να κινηθεί το σωμάτιο από τη θέση x_1 στη θέση $x_2>x_1$;

Απάντηση: Β) $u(t)=u_0\dfrac{1}{1+u_0\dfrac{b}{m}t}$

Γ) $x(t)=\dfrac{m}{b}\ln\left(1+u_0\dfrac{b}{m}t\right)$

Δ) $\dfrac{d\left(\dfrac{1}{2}mu^2\right)}{dt}=-\dfrac{bu_0^3}{\left(1+u_0\dfrac{b}{m}t\right)^3}$

Ε) $\Delta t=\dfrac{m}{bu_0}\left(e^{bx_2/m}-e^{bx_1/m}\right)$

Άσκηση 1.8: Ένα σημειακό βλήμα μάζας m βάλλεται ($t=0$) κατακόρυφα προς τα πάνω (δηλαδή προς τον θετικό άξονα z) από την αρχική θέση $z=0$ με αρχική ταχύτητα $u=u_0$, $u_0>0$. Στο βλήμα ασκούνται η σταθερή δύναμη βαρύτητας και μια προωθητική δύναμη ανάλογη της στιγμιαίας ταχύτητας του βλήματος με συντελεστή αναλογίας $b>0$.

Α) Να γραφεί η εξίσωση κίνησης του βλήματος.

Β) Να βρεθεί η ταχύτητα του βλήματος για $t>0$.

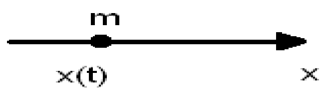
Απάντηση: Για $u_0>\dfrac{mg}{b}$ έχομε $u(t)=\dfrac{mg}{b}+\left(u_0-\dfrac{mg}{b}\right)e^{bt/m}$.

1.4 Δυνάμεις εξαρτώμενες από τη θέση

Ας θεωρήσομε υλικό σημείο μάζας m που κινείται πάνω στον άξονα x υπό την επίδραση της γενικής δύναμης $F = F(x)$, όπου x είναι η στιγμιαία θέση του υλικού σημείου. Συγκεκριμένα παραδείγματα θα δούμε πιο κάτω.

Ας θεωρήσομε ότι την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$, το υλικό σημείο ήταν στη θέση x_0 και είχε ταχύτητα u_0. Θέλομε να βρούμε την ταχύτητα και τη θέση του υλικού σημείου για $t > 0$.

Ζωγραφίζομε τον άξονα x με φορά προς τα δεξιά και θεωρούμε ότι την τυχούσα χρονική στιγμή t το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x(t)$.



Βάσει του Δεύτερου Νόμου του Νεύτωνα γράφομε

$$m\frac{du}{dt} = F(x). \tag{1.41}$$

Όπως στα προηγούμενα, έτσι κι εδώ πρέπει με κάποιο τρόπο να λύσομε τη διαφορική εξίσωση (1.41). Όμως, λόγω του ότι εμφανίζονται τρεις μεταβλητές t, x, u πρέπει να ακολουθήσομε άλλο δρόμο. Για καλή μας τύχη, αυτός ο δρόμος θα μας οδηγήσει σε απρόσμενα αποτελέσματα.

Πολλαπλασιάζομε αμφότερα τα μέλη της (1.41) με την ταχύτητα u και έχομε

$$m\frac{du}{dt}u = F(x)u. \tag{1.42}$$

Όπως μπορείτε εύκολα να επαληθεύσετε, η εξίσωση (1.42) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mu^2\right) = F(x)u. \tag{1.43}$$

Η ποσότητα $T = \frac{1}{2}mu^2$ λέγεται *κινητική ενέργεια* του υλικού σημείου και η εξίσωση (1.43) γράφεται ως

$$\frac{dT}{dt} = F(x)u, \tag{1.44}$$

όπου η ποσότητα $F(x)u$ λέγεται *ισχύς* της δύναμης. Χωρίς λοιπόν να το καταλάβομε, αποδείξαμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 1.1: Για δυνάμεις της μορφής $F = F(x)$ και κίνηση πάνω στον άξονα x, η χρονική μεταβολή της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου πάνω στο οποίο ασκείται η δύναμη ισούται με την ισχύ της δύναμης.

Πολλαπλασιάζομε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης (1.44) με dt και έχομε

$$\frac{dT}{dt}dt = F(x)\frac{dx}{dt}dt, \tag{1.45}$$

η οποία γράφεται ως

$$dT = F(x)\,dx. \tag{1.46}$$

Πάλι χωρίς να το καταλάβομε, αποδείξαμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 1.2: Για δυνάμεις της μορφής $F = F(x)$ και κίνηση πάνω στον άξονα x, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου πάνω στο οποίο ασκείται η δύναμη ισούται με το έργο της δύναμης κατά τη μετατόπιση του υλικού σημείου.

Αν η εξίσωση (1.46) σας παραξενεύει, σκεφθείτε την ως εξής. Έστω ότι η δύναμη μετατοπίζει το υλικό σημείο από τη θέση x στη θέση $x + dx$. Άρα το έργο της δύναμης είναι $F(x)\,dx$. Επίσης, έστω ότι στη θέση x η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου ήταν T και στη θέση $x + dx$ έγινε $T + dT$. Άρα η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι dT. Οι ποσότητες $F(x)$, dx, dT είναι αλγεβρικές. Στο Λύκειο, την εξίσωση (1.46) την γράφαμε ως $\Delta T = F(x)\,\Delta x$.

Αν και δεν είναι απαραίτητο, την εξίσωση (1.46) τη γράφομε ως εξής:

$$d\left(\frac{1}{2}mu^2\right) = F(x)\,dx. \tag{1.47}$$

Παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές είναι χωρισμένες, δηλαδή αριστερά έχομε ταχύτητα και δεξιά θέση. Άρα μπορούμε να ολοκληρώσομε κατά μέλη. Ολοκληρώνομε λοιπόν το αριστερό μέλος από την αρχική ταχύτητα u_0 μέχρι την τυχούσα ταχύτητα u και το δεξιό από την αρχική θέση x_0 μέχρι την τυχούσα θέση x. Έτσι έχομε

$$\int_{u_0}^{u} d\left(\frac{1}{2}mu^2\right) = \int_{x_0}^{x} F(x)dx, \tag{1.48}$$

ή

$$\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}mu_0^2 = \int_{x_0}^{x} F(x)dx, \tag{1.49}$$

την οποία γράφομε ως εξής

$$\frac{1}{2}mu^2 - \int_{x_0}^{x} F(x)dx = \frac{1}{2}mu_0^2 = \text{σταθερά}, \tag{1.50}$$

διότι οι ποσότητες $1/2$, m, u_0 είναι σταθερές. Ο δεύτερος όρος στο αριστερό μέλος, μαζί με το πρόσημο $-$, είναι μια συνάρτηση του x, ας την πούμε $V(x)$. Έτσι, η εξίσωση (1.50) γράφεται

$$T + V = \text{σταθερά} = E\,. \tag{1.51}$$

Αν ορίσομε την ποσότητα

$$V(x) \equiv -\int_{x_0}^{x} F(x)dx \tag{1.52}$$

ως τη *δυναμική ενέργεια* του υλικού σημείου στη θέση x και το E ως την *ολική ενέργεια* του υλικού σημείου, τότε χωρίς να το καταλάβομε αποδείξαμε το *θεώρημα διατήρησης της ενέργειας*.

Θεώρημα 1.3: Για δυνάμεις της μορφής $F = F(x)$, που δρουν σε υλικό σημείο που κινείται στον άξονα x, το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας του υλικού σημείου είναι σταθερό κατά την κίνηση του.

Από τον ορισμό που δώσαμε για την δυναμική ενέργεια, είναι προφανές ότι αυτή μηδενίζεται στην αρχική θέση x_0 διότι

$$V(x_0) \equiv -\int_{x_0}^{x_0} F(x)dx = 0\,. \tag{1.53}$$

Ας υποθέσομε ότι δεν θέλομε η δυναμική ενέργεια να μηδενίζεται στην αρχική θέση x_0, αλλά σε κάποια άλλη θέση x_1. Τότε γράφομε την εξίσωση (1.50) ως εξής:

$$\frac{1}{2}mu^2 - \int_{x_0}^{x_1} F(x)dx - \int_{x_1}^{x} F(x)dx = \frac{1}{2}mu_0^2 \tag{1.54}$$

ή

$$\frac{1}{2}mu^2 - \int_{x_1}^{x} F(x)dx = \frac{1}{2}mu_0^2 + \int_{x_0}^{x_1} F(x)dx = \text{σταθερά}. \tag{1.55}$$

Το δεξιό μέλος της (1.55) είναι σταθερό διότι το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης είναι αριθμός.

Αν τώρα ορίσομε τη δυναμική ενέργεια ως

$$V(x) \equiv -\int_{x_1}^{x} F(x)dx \tag{1.56}$$

και την ολική ενέργεια ως

$$E = \frac{1}{2} m u_0^2 + \int_{x_0}^{x_1} F(x)dx = \text{σταθερά} \tag{1.57}$$

πάλι μπορούμε να γράψομε

$$T + V = \text{σταθερά} = E\,, \tag{1.58}$$

μόνο που τώρα και το E και το V έχουν διαφορετικές τιμές από πριν. Και από τον ορισμό (1.52) και από τον ορισμό (1.56) έχομε ότι

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}. \tag{1.59}$$

Με άλλα λόγια, η δυναμική ενέργεια είναι το μείον έργο της δύναμης και η δύναμη είναι η μείον παράγωγος της δυναμικής ενέργειας.

<u>Παρατήρηση 1</u>: Το μηδέν της δυναμικής ενέργειας μπορούμε να το βάλομε όπου θέλομε και ο νόμος διατήρησης της ενέργειας ισχύει. Οι τιμές της δυναμικής ενέργειας και της ολικής ενέργειας αλλάζουν ανάλογα με το που βάλαμε το μηδέν της δυναμικής ενέργειας.

<u>Παρατήρηση 2</u>: Παρά το γεγονός ότι οι άνθρωποι διατείνονται ότι καταλαβαίνουν τι θα πει *ενέργεια*, <u>κανείς πραγματικά δεν την καταλαβαίνει</u>! Άλλωστε, πώς είναι δυνατόν να κατανοήσει κάποιος μια ποσότητα που για έναν είναι θετική, για άλλον αρνητική και για άλλον μηδέν, ανάλογα με το που βάζει ο καθένας το μηδέν της δυναμικής ενέργειας;

<u>Παρατήρηση 3</u>: Έχομε όλοι συνηθίσει να αποκαλούμε την ποσότητα $\frac{1}{2} m u^2$ κινητική ενέργεια, την ποσότητα E ολική ενέργεια και τώρα είδαμε ότι από εδώ και πέρα θα αποκαλούμε την ποσότητα $-\int_{x_1}^{x} F(x)dx$ δυναμική ενέργεια. Με αυτούς τους ορισμούς, <u>αποδείξαμε</u> από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα ότι η ολική ενέργεια, που είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής, είναι σταθερό. Αν όμως ορίζαμε

$$\frac{1}{2} m u^2 = \text{«πράσινα άλογα»}$$

$$-\int_{x_1}^{x} F(x)dx = \text{«μπλε νεράιδες»}$$

$$E = \text{«αλλόκοτα όντα»}$$

τότε από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα θα γράφαμε τον νόμο

$$\text{«πράσινα άλογα»} + \text{«μπλε νεράιδες»} = \text{«αλλόκοτα όντα»} \tag{1.60}$$

Ως άνθρωποι, όσο καταλαβαίνομε αυτά τα «αλλόκοτα όντα» άλλο τόσο καταλαβαίνομε και την έννοια της ενέργειας! Επειδή την χρησιμοποιούμε καθημερινά, δεν σημαίνει ότι την καταλαβαίνομε κιόλας!!!

Παρατήρηση 4: Σύμφωνα με τον ορισμό (1.56), η δυναμική ενέργεια του υλικού σημείου στη θέση x ισούται με το μείον έργο της δύναμης για μετατόπιση του υλικού σημείου από τη θέση x_1 μέχρι τη θέση x.

Παρατήρηση 5: Ας δούμε αν, με τον ορισμό (1.56), μπορούμε να αποδείξομε ότι η δυναμική ενέργεια υλικού σημείου στο άκρο ελατηρίου είναι $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, όπου k είναι η σταθερά του ελατηρίου. Η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο υλικό σημείο είναι $F(x) = -kx$, όπου x είναι η επιμήκυνση του ελατηρίου. Επίσης θέλομε η δυναμική ενέργεια να είναι μηδέν όταν $x = 0$. Έτσι γράφομε

$$V(x) \equiv -\int_0^x (-kx)dx = \frac{1}{2}kx^2 .$$

Ομοίως, για τη δυναμική ενέργεια στο σταθερό πεδίο βαρύτητας της Γης ξέρομε ότι $V(z) = mgz$, όπου z είναι το ύψος στο οποίο βρίσκεται το υλικό σημείο και το μηδέν της δυναμικής ενέργειας το πήραμε στο $z = 0$. Αυτό αποδεικνύεται από τη σχέση (1.56), αν λάβομε υπόψη μας ότι $F(z) = -mg$ για άξονα z που δείχνει προς τα πάνω (έτσι ώστε το z να είναι ύψος) και

$$V(z) \equiv -\int_0^z (-mg)dz = mgz .$$

Ορισμός: Δυνάμεις για τις οποίες μπορούμε να γράψομε τον νόμο διατήρησης της ενέργειας λέγονται *διατηρητικές*.

Συμπέρασμα: Για μονοδιάστατες κινήσεις πάνω στον άξονα x, όλες οι δυνάμεις της μορφής $F = F(x)$ είναι *διατηρητικές*. Φυσικά, και οι σταθερές δυνάμεις, όπως το σταθερό πεδίο βαρύτητας, εμπίπτουν σ' αυτή την κατηγορία.

Μελέτη της κίνησης υλικού σημείου σε πεδίο δυνάμεων $F = F(x)$: Ας επανέλθομε τώρα στην αρχική μας επιθυμία να βρούμε την ταχύτητα και τη θέση του υλικού σημείου.

Από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα (1.41) αποδείξαμε τον νόμο διατήρησης της ενέργειας, δηλαδή

$$\frac{1}{2}mu^2 + V(x) = E = \text{σταθερό}, \tag{1.61}$$

όπου $E = \frac{1}{2}mu_0^2 + V(x_0)$, διότι η ολική ενέργεια κατά την κίνηση παραμένει σταθερή και ίση με την τιμή που είχε στην αρχή της κίνησης.

Λύνοντας την εξίσωση (1.61) ως προς την ταχύτητα έχομε

$$u(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}, \qquad (1.62)$$

όπου το $+$ σημαίνει κίνηση προς τα δεξιά και το $-$ κίνηση προς τα αριστερά. Παρατηρούμε ότι, από τον νόμο διατήρησης της ενέργειας, βρήκαμε αμέσως την ταχύτητα του υλικού σημείου σε κάθε θέση x. Πρέπει όμως να παρατηρήσομε τα εξής:

Για να είναι η ταχύτητα (1.62) πραγματικός αριθμός, πρέπει

$$E = \frac{1}{2}mu_0^2 + V(x_0) \geq V(x). \qquad (1.63)$$

Με άλλα λόγια, <u>κίνηση του υλικού σημείου επιτρέπεται μόνο</u> στα σημεία x που ικανοποιούν τη σχέση (1.63). Αυτό είναι λογικό. Δεν μπορεί ποτέ η δυναμική ενέργεια, που είναι μέρος της όλης ενέργειας, να είναι μεγαλύτερη από την ολική ενέργεια.

Στη θέση x, που ικανοποιεί την ισότητα, το υλικό σημείο είναι <u>στιγμιαία</u> ακίνητο. Λέμε <u>στιγμιαία ακίνητο</u> και όχι απλώς <u>ακίνητο</u>, διότι αν η $F(x)$ είναι διάφορη του μηδενός σ' αυτή τη θέση x, θα μετακινήσει το υλικό σημείο.

Ισοδύναμα με τα παραπάνω, μπορούμε να αποφανθούμε ότι το υλικό σημείο δεν μπορεί να βρεθεί ποτέ σε σημεία x του άξονα x για τα οποία η σχέση (1.63) δεν ικανοποιείται.

Αν τώρα θέλομε να βρούμε τη θέση του υλικού σημείου σε κάθε χρονική στιγμή δουλεύομε όπως παραπάνω. Γράφομε την (1.62) ως

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}. \qquad (1.64)$$

Πολλαπλασιάζομε αμφότερα τα μέλη με dt

$$\frac{dx}{dt}dt = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}dt. \qquad (1.65)$$

Το αριστερό μέλος είναι ίσο με dx και συνεπώς γράφομε

$$\frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}} = dt. \qquad (1.66)$$

Οι μεταβλητές x, t είναι χωρισμένες και επομένως μπορούμε να ολοκληρώσομε κατά μέλη. Τα όρια της ολοκλήρωσης είναι η αρχική και η τυχούσα χρονική στιγμή στο ένα και η αρχική και η τυχούσα θέση στο άλλο.

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}} = \int_0^t dt = t\,. \tag{1.67}$$

Το αριστερό μέλος της (1.67) είναι μια συνάρτηση του x, ας πούμε $f(x)$. Αν δεν είναι πολύπλοκη, μπορούμε να λύσομε την $f(x) = t$ ως προς x συναρτήσει του t.

Παράδειγμα 1.9: Θεωρήστε υλικό σημείο μάζας m, που έχει δυναμική ενέργεια $V(x) = -\frac{V_0}{1+(x/x_0)^2}$, όπου $V_0 = 1\,\mathrm{J}$ και $x_0 = 1\,\mathrm{m}$. Αν το υλικό σημείο ξεκινήσει με ταχύτητα $u_0 > 0$ από ένα σημείο $x << -x_0$, δηλαδή από ένα αρνητικό x αρκετά μεγάλο κατά μέτρο ώστε η δυναμική ενέργεια εκεί να είναι σχεδόν ίση με το μηδέν, δείξτε ότι ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει την απόσταση από $-L$ μέχρι L, όπου $L = 10x_0$, είναι <u>μικρότερος</u> απ' ότι αν η δυναμική του ενέργεια ήταν μηδέν.

Λύση: Η δυναμική ενέργεια είναι ίση με $-V_0$ για $x = 0$ και πάει ασυμπτωτικά στο μηδέν από αρνητικές τιμές για $|x| \to \infty$.

Η ενέργεια του υλικού σημείου είναι $E = \frac{1}{2}mu_0^2$, διότι ακόμη και αν έχει δυναμική ενέργεια, αυτή είναι ουσιαστικά ίση με μηδέν στην αρχική θέση.

<u>Περίπτωση 1</u>: $V(x) = 0$. Τότε, ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει το υλικό σημείο το διάστημα από $-L$ μέχρι L είναι προφανώς

$$t_1 = \frac{2L}{u_0}\,.$$

Το ίδιο δίνει και η εξίσωση (1.67) για $V(x) = 0$.

<u>Περίπτωση 2</u>: $V(x) = -\frac{V_0}{1+(x/x_0)^2}$. Τότε, σύμφωνα με την εξίσωση (1.67), ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει το υλικό σημείο το διάστημα από $-L$ μέχρι L είναι

$$t_2 = \int_{-L}^{L} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{1}{2}mu_0^2 + \frac{V_0}{1+(x/x_0)^2}\right]}} = \int_{-L}^{L} \frac{dx}{\sqrt{u_0^2 + \frac{2}{m}\frac{V_0}{1+(x/x_0)^2}}} < \int_{-L}^{L} \frac{dx}{u_0} = \frac{1}{u_0}\int_{-L}^{L} dx = \frac{2L}{u_0} = t_1$$

Με άλλα λόγια, επειδή η δυναμική ενέργεια είναι αρνητική, η κινητική ενέργεια $T = E - V$ είναι μεγαλύτερη (!!!) από την ολική ενέργεια $E = \frac{1}{2}mu_0^2$, δηλαδή το υλικό σημείο κινείται με ταχύτητα μεγαλύτερη από u_0.

Παρατήρηση: Για δυναμική ενέργεια $V(x) = \dfrac{V_0}{1+(x/x_0)^2}$, $t_2 > t_1$.

Παράδειγμα 1.10: Θεωρήστε ελατήριο σταθεράς k στον άξονα x με το ένα άκρο του σταθερό και στο άλλο να υπάρχει υλικό σημείο μάζας m. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι x_0 και η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι u_0. Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου.

Λύση: Πριν εφαρμόσομε όσα είπαμε παραπάνω για τον νόμο διατήρησης της ενέργειας, ας δούμε αυτό το πρόβλημα από τη σκοπιά του Δεύτερου Νόμου του Νεύτωνα.

Η εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου είναι

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

όπου x είναι η επιμήκυνση (θετική ή αρνητική) του ελατηρίου. Με άλλα λόγια, x είναι η απομάκρυνση (θετική ή αρνητική) της σημειακής μάζας m από τη θέση ισορροπίας της. Η εξίσωση αυτή γράφεται ως

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

όπου αντικαταστήσαμε το k/m με το ω^2 (τον λόγο γι' αυτό θα τον κατανοήσομε παρακάτω). Η διαφορική αυτή εξίσωση λέγεται *εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή* και θα τη συναντήσετε πάρα πολλές φορές στις σπουδές σας. Είναι σημαντικό λοιπόν και να την απομνημονεύσετε και να κατανοήσετε τη λύση της.

Όπως είπαμε στο κείμενο που ακολουθεί την εξίσωση (1.4), η εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή μας λέει το εξής: Από όλες τις συναρτήσεις του κόσμου $x(t)$ θέλομε να βρούμε εκείνες που, αν τις παραγωγίσομε δυο φορές να μας κάνουν τον εαυτό τους πολλαπλασιασμένο με $-\omega^2$.

Όσο και να ψάξομε, δεν θα βρούμε άλλες από τις συναρτήσεις $\sin\omega t$ και $\cos\omega t$. Φυσικά, και οι συναρτήσεις αυτές πολλαπλασιασμένες με μια σταθερά μας κάνουν, όπως βεβαίως και το άθροισμά τους. Έτσι, η γενική λύση της εξίσωσης αρμονικού ταλαντωτή είναι

$$x(t) = c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t$$

και η γενική λύση για την ταχύτητα είναι

$$u(t)=\frac{dx}{dt}=c_1\omega\cos\omega t-c_2\omega\sin\omega t$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Για τις δοθείσες αρχικές συνθήκες $x(0)=x_0$ και $u(0)=u_0$ βρίσκομε **τη** λύση του προβλήματος

$$x(t)=\frac{u_0}{\omega}\sin\omega t+x_0\cos\omega t$$
$$u(t)=u_0\cos\omega t-x_0\omega\sin\omega t\,.$$

Ουσιαστικά τελειώσαμε και μάλιστα χωρίς πολύ κόπο. Τότε σε τι μας χρειάζεται ο νόμος διατήρησης της ενέργειας και η λύση (1.59) που βρήκαμε μέσω αυτού; Η απάντηση είναι η εξής:

Στο πρόβλημα του αρμονικού ταλαντωτή η δύναμη $F(x)=-kx$ είναι σχετικά απλή και με λίγη σκέψη μπορέσαμε να μαντέψομε τις συναρτήσεις $\sin\omega t$ και $\cos\omega t$. Για πολύπλοκες δυνάμεις $F(x)$ αυτό είναι αδύνατον. Γι' αυτές τις περιπτώσεις ο νόμος διατήρησης της ενέργειας είναι πολύτιμος και η ζητούμενη λύση θα δίνεται από τις σχέσεις (1.62) και (1.67).

Ας δούμε τώρα τη λύση του προβλήματος του αρμονικού ταλαντωτή μέσω του νόμου διατήρησης της ενέργειας.

Από τη σχέση (1.62) έχομε ότι

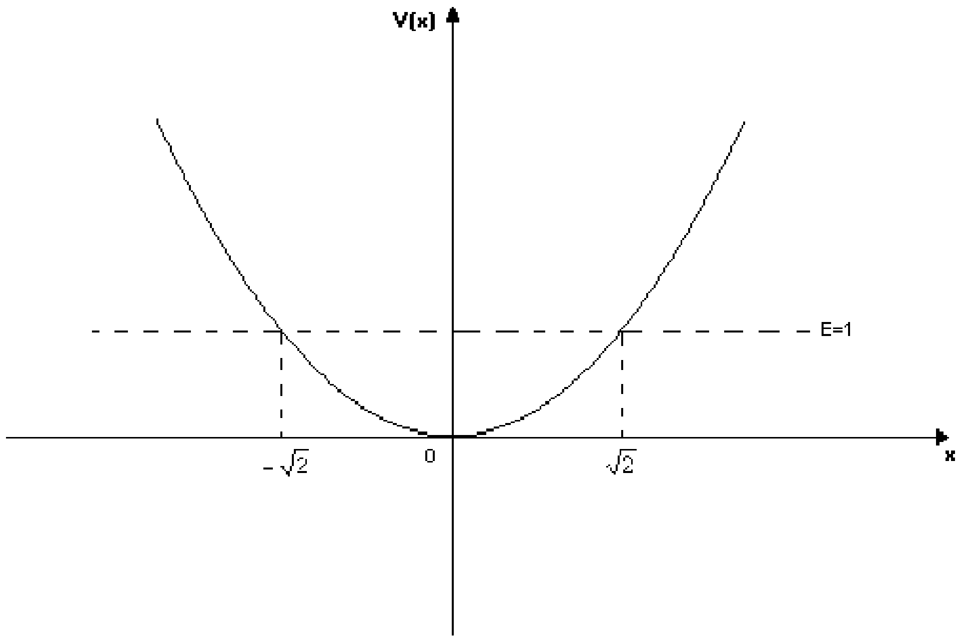
$$u(x)=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-\frac{1}{2}kx^2\right]}\,.$$

Για να είναι η ταχύτητα πραγματική, πρέπει (βλ. σχέση 1.63)

$$E=\frac{1}{2}mu_0^2+V(x_0)\geq\frac{1}{2}kx^2\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι, για τις δοθείσες αρχικές συνθήκες, κίνηση επιτρέπεται μόνο μεταξύ των σημείων $x=-\sqrt{\frac{2E}{k}}$ και $x=+\sqrt{\frac{2E}{k}}$. Ας το δούμε αυτό καλύτερα με μια γραφική παράσταση.

Ζωγραφίζομε τη δυναμική ενέργεια $V(x)=\frac{1}{2}kx^2$. Ο οριζόντιος άξονας είναι η θέση x και ο κατακόρυφος άξονας είναι άξονας ενέργειας. Στο SI, η θέση μετράται σε m και η ενέργεια σε Joule.



Με βάση τις αρχικές συνθήκες, η ολική ενέργεια είναι E Joule, ας πούμε 1 Joule. Ζωγραφίζομε λοιπόν και μια οριζόντια ευθεία που τέμνει τον κατακόρυφο άξονα της ενέργειας στο σημείο $E = 1$ Joule. Η ευθεία αυτή τέμνει την καμπύλη $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ στα σημεία $x = -\sqrt{\frac{2E}{k}}$ και $x = +\sqrt{\frac{2E}{k}}$. Αν, χάριν ευκολίας, πάρομε $k = 1$ Nt/m, τότε τα σημεία αυτά είναι αυτά που φαίνονται στο σχήμα.

Επειδή κίνηση επιτρέπεται μόνο σ' εκείνα τα σημεία του άξονα x για τα οποία ισχύει $E \geq V(x)$ ή $E \geq \frac{1}{2}kx^2$, είναι προφανές από το σχήμα ότι κίνηση επιτρέπεται μόνο μεταξύ των σημείων $x = -\sqrt{\frac{2E}{k}}$ και $x = +\sqrt{\frac{2E}{k}}$. Αν το υλικό σημείο βρεθεί έξω από αυτά, η ταχύτητά του θα είναι φανταστική, πράγμα άτοπο.

Από τις αρχικές συνθήκες ξέρομε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση x_0 και η ταχύτητά του είναι u_0. Χάριν ευκολίας, ας δεχτούμε ότι $x_0 > 0$ και $u_0 > 0$. Με άλλα λόγια, το υλικό σημείο βρίσκεται δεξιά της αρχής των αξόνων και κινείται προς τα δεξιά.

Αφού η αρχική δυναμική του ενέργεια είναι $V(x_0) = \frac{1}{2}kx_0^2$, η αρχική κινητική του ενέργεια είναι $\frac{1}{2}mu_0^2 = E - \frac{1}{2}kx_0^2$. Αυτό το βλέπομε και στο σχήμα. Η κινητική ενέργεια είναι το κατακόρυφο κομμάτι μεταξύ της οριζόντιας ευθείας E και της καμπύλης της δυναμικής ενέργειας.

Καθώς περνάει ο χρόνος, το υλικό σημείο κινείται προς τα δεξιά, η δυναμική του ενέργεια αυξάνεται και η κινητική του ελαττώνεται. Στο σημείο $x = +\sqrt{\frac{2E}{k}}$ η δυναμική του ενέργεια γίνεται ίση με την ολική, η κινητική γίνεται μηδέν και το υλικό σημείο στιγμιαία μένει ακίνητο. Λέμε στιγμιαία, διότι στη θέση $x = +\sqrt{\frac{2E}{k}}$ η δύναμη δεν είναι μηδέν, αλλά $F = -k\sqrt{\frac{2E}{k}} < 0$. Αρνητική δύναμη σημαίνει ότι θα σπρώξει το υλικό σημείο προς τα αριστερά. Έτσι, το υλικό σημείο αρχίζει την πορεία του προς τα αριστερά. Μέχρι το σημείο $x = 0$, η δύναμη μειώνεται κατά μέτρο, η δυναμική ενέργεια του υλικού σημείου μειώνεται και η κινητική του αυξάνεται. Στο σημείο $x = 0$, η δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο είναι μηδέν, η δυναμική ενέργεια του υλικού σημείου είναι μηδέν και η κινητική του είναι μέγιστη και ίση με E. Παρά το γεγονός ότι η δύναμη είναι μηδέν στη σημείο $x = 0$, το υλικό σημείο συνεχίζει να κινείται διότι έχει κινητική ενέργεια. Στα αρνητικά x, η δύναμη είναι θετική και αυξάνεται συνεχώς, η δυναμική ενέργεια αυξάνεται και η κινητική ελαττώνεται. Στο σημείο $x = -\sqrt{\frac{2E}{k}}$ η δυναμική ενέργεια του υλικού σημείου γίνεται ίση με την ολική, η κινητική γίνεται μηδέν και το υλικό σημείο στιγμιαία μένει ακίνητο. Λέμε στιγμιαία, διότι στη θέση $x = -\sqrt{\frac{2E}{k}}$ η δύναμη δεν είναι μηδέν, αλλά $F = -k\left(-\sqrt{\frac{2E}{k}}\right) > 0$. Θετική δύναμη σημαίνει ότι θα σπρώξει το υλικό σημείο προς τα δεξιά. Έτσι, το υλικό σημείο αρχίζει την πορεία του προς τα δεξιά.

Από τα παραπάνω καταλαβαίνομε ότι το υλικό σημείο κάνει *ταλάντωση* μεταξύ των σημείων $x = -\sqrt{\frac{2E}{k}}$ και $x = +\sqrt{\frac{2E}{k}}$.

Ακριβώς τα ίδια μας λέει και η λύση $x(t) = \frac{u_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t$, που βρήκαμε παραπάνω, μόνο που δεν μας τα λέει τόσο απλά όσο η μελέτη μέσω της δυναμικής ενέργειας. Αυτό θα το εμπεδώσετε καλύτερα στα πιο δύσκολα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 1.11: Υλικό σημείο μάζας $m = 2$ kgr κινείται στον άξονα x υπό την επίδραση μόνο της δύναμης $F(x) = ax + b$, όπου $a = 8$ Nt/m, $b = -4$ Nt και το x μετράται σε m. Αν για $t = 0$, $x = 2$ m, $u = u_0 < 0$ και $E = 1/2$ Joule,

Α) Να βρεθεί και να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δυναμική ενέργεια $V(x)$ του υλικού σημείου θεωρώντας ότι το μηδέν της είναι στο σημείο $x = 0$.

Β) Να περιγράψετε την κίνηση του υλικού σημείου για $t > 0$.

Γ) Να βρείτε την ταχύτητα του υλικού σημείου ως συνάρτηση της θέσης x.

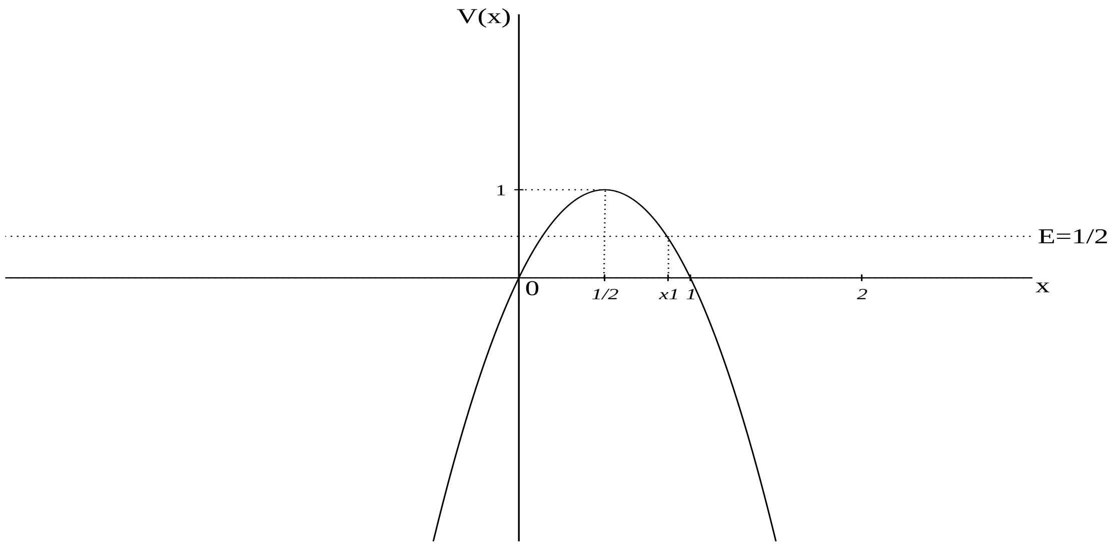
Λύση:

A) $$V(x) = -\int F(x)dx + c = -\int (ax+b)dx + c = -a\frac{x^2}{2} - bx + c,$$

όπου τη δυναμική ενέργεια την υπολογίσαμε με αόριστο ολοκλήρωμα και προσθέσαμε μια αυθαίρετη σταθερά c. Επειδή για $x=0$, θέλομε $V(0)=0$, η σταθερά c πρέπει να είναι ίση με μηδέν.

Αντικαθιστώντας τα a, b έχουμε $V(x) = -4x^2 + 4x$

Η $V(x)$ μηδενίζεται στα σημεία $x=0$ και $x=1$ και έχει μέγιστο $V_{\max} = 1$ για $x = 1/2$.



B) Το υλικό σημείο ξεκινά από τη θέση $x=2$ και επειδή η ταχύτητά του εκεί είναι $u_0 < 0$ κινείται προς τα αρνητικά x μέχρι τη θέση $x = x_1$ όπου $V(x_1) = E = 1/2$. Με λύση της εξίσωσης $V(x) = E$, δηλαδή $-4x^2 + 4x = 1/2$, βρίσκομε $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Στο σημείο $x = x_1$ σταματά στιγμιαία διότι η κινητική ενέργειά του μηδενίζεται.

Όμως, λόγω του ότι $F(x_1) = -\left.\frac{dV(x)}{dx}\right|_{x=x_1} > 0$, αναγκάζεται να κινηθεί προς τα θετικά x και συνεχίζει να κινείται μέχρι το $+\infty$.

Γ) Από τον νόμο διατήρησης της ενέργειας έχουμε $u(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}$ και με αντικαταστάσεις των m, E, $V(x)$ έχομε $u(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + 4x^2 - 4x}$. Το $+$ ισχύει για κίνηση προς τα δεξιά και το $-$ για κίνηση προς τα αριστερά.

Παράδειγμα 1.12: Η δυναμική ενέργεια ενός υλικού σημείου μάζας $m = 1$kg είναι $V(x) = ax^2 - bx + c$, όπου $a = 1$ Joule/m^2, $b = 4$ Joule/m, $c = 1$ Joule και το x μετράται σε m.

Α) Να βρεθεί και να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δύναμη $F(x)$ που ασκείται στο υλικό σημείο.
Β) Να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δυναμική ενέργεια $V(x)$ του υλικού σημείου.
Γ) Θεωρήστε ότι για $t=0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x(0)=3\,\text{m}$ και έχει ταχύτητα $u(0)=2\,\text{m/s}$. Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου για $t>0$. Υπενθυμίζεται ότι δεν μπορεί το υλικό σημείο να βρεθεί σε μια θέση x για την οποία $V(x)>E$.
Δ) Θεωρήστε ότι για $t=0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x(0)=1\,\text{m}$ και έχει ταχύτητα $u(0)=-\sqrt{6}\,\text{m/s}$. Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου για $t>0$.
Ε) Θεωρήστε ότι για $t=0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x(0)=1\,\text{m}$ και έχει ταχύτητα $u(0)=0\,\text{m/s}$. Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου για $t>0$.
ΣΤ) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου **για όλες τις τιμές της ολικής ενέργειας** E, δηλαδή για οποιεσδήποτε **επιτρεπτές** αρχικές συνθήκες.

Λύση:
Α) Αντικαθιστώντας τα $a,\ b,\ c$ έχομε $V(x)=x^2-4x+1$. Η δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο είναι $F(x)=-dV/dx=-2x+4$ και η γραφική παράστασή της είναι ευθεία γραμμή που τέμνει τον άξονα x στο σημείο $x=2$ και τον άξονα της F στο σημείο $F=4$.

Β) Η $V(x)$ μηδενίζεται στα σημεία $x=2-\sqrt{3}$ και $x=2+\sqrt{3}$, έχει ελάχιστο στο σημείο $x=2$, πού είναι ίσο με $V_{\min}=-3$ και για $x=0$ έχομε $V(0)=1$. Η γραφική παράστασή της έχει σχήμα U (παραβολικό), δηλαδή για $x\to\pm\infty$, $V\to+\infty$. Να τη σχεδιάσετε!!!

Παρατήρηση: Από τη γραφική παράσταση της $V(x)$ μπορούμε εύκολα να αποφανθούμε αν η δύναμη στην τυχούσα θέση x είναι θετική ή αρνητική. Κοιτάζομε την κλίση της $V(x)$ στο σημείο που μας ενδιαφέρει. Αν η κλίση είναι θετική, τότε η δύναμη εκεί είναι αρνητική, διότι $F(x)=-dV(x)/dx$. Ομοίως, αν η κλίση είναι αρνητική, η δύναμη είναι θετική.

Γ) Τη χρονική στιγμή $t=0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x(0)=3\,\text{m}$ και έχει δυναμική ενέργεια $V(3)=-2$ Joule. Επίσης έχει ταχύτητα $u(0)=2\,\text{m/s}$ και κινητική ενέργεια $T=(1/2)mu^2(0)=2$ Joule. Συνεπώς, το υλικό σημείο έχει ολική ενέργεια $E=T+V=0$.

Η οριζόντια ευθεία $V(x)=E=0$ συμπίπτει με τον άξονα x και τέμνει την $V(x)$ στα σημεία $x=2-\sqrt{3}$ και $x=2+\sqrt{3}$. Ανάμεσα σε αυτά τα σημεία έχομε ότι $E>V(x)$ και επομένως κίνηση είναι επιτρεπτή, ενώ έξω από αυτά τα σημεία κίνηση δεν είναι επιτρεπτή, διότι $E<V(x)$, που είναι αδύνατον στον φυσικό κόσμο.

Το υλικό σημείο ξεκινά από τη θέση $x=3$ και κινείται προς τα δεξιά, αφού η αρχική ταχύτητά του είναι θετική. Καθώς κινείται προς τα δεξιά, η δυναμική ενέργειά του αυξάνεται, άρα η κινητική του μειώνεται. Όταν το υλικό σημείο φθάσει στη θέση $x=2+\sqrt{3}$, η δυναμική ενέργειά του γίνεται ίση με την ολική, δηλαδή

$E = V(2+\sqrt{3}) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η κινητική ενέργειά του μηδενίζεται, δηλαδή το υλικό σημείο ακινητεί. Αυτή η ακινησία όμως είναι στιγμιαία, διότι στη θέση $x = 2+\sqrt{3}$ ασκείται δύναμη στο υλικό σημείο. Από το ερώτημα Α έχομε ότι η ασκούμενη δύναμη είναι $F(2+\sqrt{3}) = -2(2+\sqrt{3})+4 < 0$ (η κλίση της $V(x)$ είναι θετική). Άρα το υλικό σημείο θα αρχίσει να κινείται προς τα αριστερά <u>με συνεχώς αυξανόμενη ταχύτητα</u>, διότι η δυναμική ενέργεια μειώνεται από το $x = 2+\sqrt{3}$ μέχρι το $x = 2$ και επομένως η κινητική ενέργεια αυξάνεται. Στο $x = 2$ η δυναμική ενέργεια είναι ελάχιστη, η κινητική μέγιστη και η δύναμη μηδέν (η κλίση της $V(x)$ είναι μηδέν). Παρά το ότι η δύναμη είναι μηδέν στο $x = 2$, το υλικό σημείο συνεχίζει να κινείται προς τα αριστερά, διότι έχει ταχύτητα.

Στο διάστημα $2-\sqrt{3} < x < 2$ η δυναμική ενέργεια αυξάνεται, η κινητική ενέργεια μειώνεται και στο $x = 2-\sqrt{3}$ το υλικό σημείο στιγμιαία ακινητεί. Όμως, στο $x = 2-\sqrt{3}$ ασκείται δύναμη $F(2-\sqrt{3}) = -2(2-\sqrt{3})+4 > 0$ (η κλίση της $V(x)$ είναι αρνητική) και το υλικό σημείο αρχίζει να κινείται προς τα δεξιά, επιταχυνόμενο μέχρι τη θέση $x = 2$ και επιβραδυνόμενο από εκεί μέχρι τη θέση $x = 2+\sqrt{3}$.

<u>Συμπέρασμα</u>: Το υλικό σημείο εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των σημείων $x = 2-\sqrt{3}$ και $x = 2+\sqrt{3}$. Η ταλάντωση είναι <u>αρμονική</u> διότι στο υλικό σημείο ασκείται δύναμη αρμονικού ταλαντωτή συν μια σταθερά. Η σταθερά απλώς προκαλεί μετατόπιση του σημείου ισορροπίας.

Δ) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x(0) = 1\,\text{m}$ και έχει δυναμική ενέργεια $V(1) = -2$ Joule. Επίσης έχει ταχύτητα $u(0) = -\sqrt{6}$ m/s και κινητική ενέργεια $T = (1/2)mu^2(0) = 3$ Joule. Συνεπώς, το υλικό σημείο έχει ολική ενέργεια $E = T + V = 1$ Joule.

Η οριζόντια ευθεία $V(x) = E = 1$ είναι παράλληλη με τον άξονα x και τέμνει την $V(x)$ στα σημεία $x = 0$ και $x = 4$. Ανάμεσα σε αυτά τα σημεία έχομε ότι $E > V(x)$ και επομένως κίνηση είναι επιτρεπτή, ενώ έξω από αυτά τα σημεία <u>κίνηση δεν είναι επιτρεπτή</u>, διότι $E < V(x)$, που είναι αδύνατον.

Το υλικό σημείο ξεκινά από τη θέση $x = 1$ και κινείται προς τα αριστερά, αφού η αρχική ταχύτητά του είναι αρνητική. Καθώς κινείται προς τα αριστερά, η δυναμική ενέργειά του αυξάνεται, άρα η κινητική του μειώνεται. Όταν το υλικό σημείο φθάσει στη θέση $x = 0$, η δυναμική ενέργειά του γίνεται ίση με την ολική, δηλαδή $E = V(0) = 1$ Joule. Αυτό σημαίνει ότι η κινητική ενέργειά του μηδενίζεται, δηλαδή το υλικό σημείο ακινητεί. Αυτή η ακινησία όμως είναι στιγμιαία, διότι στη θέση $x = 0$ ασκείται δύναμη στο υλικό σημείο. Από το ερώτημα Α έχομε ότι η ασκούμενη δύναμη είναι $F(0) = 4 > 0$ (η κλίση της $V(x)$ είναι αρνητική). Άρα το υλικό σημείο θα αρχίσει να κινείται προς τα δεξιά <u>με συνεχώς αυξανόμενη ταχύτητα</u>, διότι η δυναμική ενέργεια μειώνεται από το $x = 0$ μέχρι το $x = 2$ και επομένως η κινητική ενέργεια αυξάνεται. Στο $x = 2$ η δυναμική ενέργεια είναι ελάχιστη, η κινητική μέγιστη και η δύναμη μηδέν (η κλίση της $V(x)$ είναι μηδέν). Παρά το ότι η δύναμη είναι μηδέν στο $x = 2$, το υλικό σημείο συνεχίζει να κινείται προς τα δεξιά, διότι έχει ταχύτητα.

Στο διάστημα $2 < x < 4$ η δυναμική ενέργεια αυξάνεται, η κινητική ενέργεια μειώνεται και στο $x = 4$ το υλικό σημείο στιγμιαία ακινητεί. Όμως, στο $x = 4$ ασκείται δύναμη $F(2-\sqrt{3}) = -2(4) + 4 < 0$ (η κλίση της $V(x)$ είναι θετική) και το υλικό σημείο αρχίζει να κινείται προς τα αριστερά, επιταχυνόμενο μέχρι τη θέση $x = 2$ και επιβραδυνόμενο από εκεί μέχρι τη θέση $x = 0$.

Συμπέρασμα: Το υλικό σημείο εκτελεί αρμονική ταλάντωση μεταξύ των σημείων $x = 0$ και $x = 4$.

Ε) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x(0) = 1\,\mathrm{m}$ και έχει δυναμική ενέργεια $V(1) = -2$ Joule. Λόγω του ότι έχει ταχύτητα $u(0) = 0$ και κινητική ενέργεια $T = (1/2)mu^2(0) = 0$, το υλικό σημείο έχει ολική ενέργεια $E = T + V = -2$ Joule.

Η οριζόντια ευθεία $V(x) = E = -2$ είναι παράλληλη με τον άξονα x και τέμνει την $V(x)$ στα σημεία $x = 1$ και $x = 3$. Ανάμεσα σε αυτά τα σημεία έχομε ότι $E > V(x)$ και επομένως κίνηση είναι επιτρεπτή, ενώ έξω από αυτά τα σημεία κίνηση δεν είναι επιτρεπτή, διότι $E < V(x)$, που είναι αδύνατον.

Συμπέρασμα: Σύμφωνα με τα παραπάνω, η κίνηση του υλικού σημείου είναι αρμονική ταλάντωση μεταξύ των σημείων $x = 1$ και $x = 3$.

ΣΤ) Έστω ότι $x(0) = x_0$ και $u(0) = u_0$ είναι οι αρχικές συνθήκες. Τότε $E = T + V = \frac{1}{2}mu_0^2 + V(x_0) = \frac{1}{2}mu_0^2 + x_0^2 - 4x_0 + 1$. Θα πρέπει να εξετάσομε όλες τις δυνατές περιπτώσεις, που εδώ είναι τρεις.

α) Για $E < V_{\min} = -3$ Joule, δεν επιτρέπεται κίνηση του υλικού σημείου πουθενά. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχουν αρχικές συνθήκες x_0, u_0 τέτοιες ώστε $E = \frac{1}{2}mu_0^2 + V(x_0) = \frac{1}{2}mu_0^2 + x_0^2 - 4x_0 + 1 < V_{\min} = -3$ Joule.

Για επιβεβαίωση, πάρτε μια τιμή για το E που να είναι μικρότερη από το $V_{\min} = -3$ Joule. Κατόπιν, δοκιμάστε ό,τι τιμή θέλετε για το u_0 και θα δείτε ότι η εξίσωση $\frac{1}{2}mu_0^2 + x_0^2 - 4x_0 + 1 = E$ έχει μόνο μιγαδικές λύσεις για το x_0. Ομοίως, δοκιμάστε ό,τι τιμή θέλετε για το x_0 και θα δείτε ότι η εξίσωση $\frac{1}{2}mu_0^2 + x_0^2 - 4x_0 + 1 = E$ έχει μόνο μιγαδικές λύσεις για το u_0.

β) Για $E = V_{\min}$, το υλικό σημείο μπορεί μόνο να είναι ακίνητο στο σημείο $x = 2$. Με άλλα λόγια, $x(0) = x_0 = 2\,\mathrm{m}$ και $u(0) = u_0 = 0$.

γ) Για $E > V_{\min}$, το υλικό σημείο κάνει αρμονική ταλάντωση μεταξύ των σημείων x_1, x_2 που είναι λύσεις της εξίσωσης $V(x) = E$ ή $x^2 - 4x + 1 - E = 0$. Με άλλα λόγια, $x_1 \le x(0) = x_0 \le x_2$ και

$$u(0) = u_0 = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x_0)\right]} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - x_0^2 + 4x_0 - 1\right]}.$$

Παράδειγμα 1.13: Η δυναμική ενέργεια ενός υλικού σημείου μάζας $m = 1\,\text{kg}$ είναι $V(x) = -ax^3 + bx^2$, όπου $a = 1$ Joule/m^3, $b = 1$ Joule/m^2 και το x μετράται σε m.

Α) Να βρεθεί και να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δύναμη $F(x)$ που ασκείται στο υλικό σημείο.

Β) Να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δυναμική ενέργεια $V(x)$ του υλικού σημείου.

Γ) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου για όλες τις τιμές της ολικής ενέργειας E, δηλαδή για οποιεσδήποτε **επιτρεπτές** αρχικές συνθήκες. Υπενθυμίζεται ότι δεν μπορεί το υλικό σημείο να βρεθεί σε μια θέση x για την οποία $V(x) > E$.

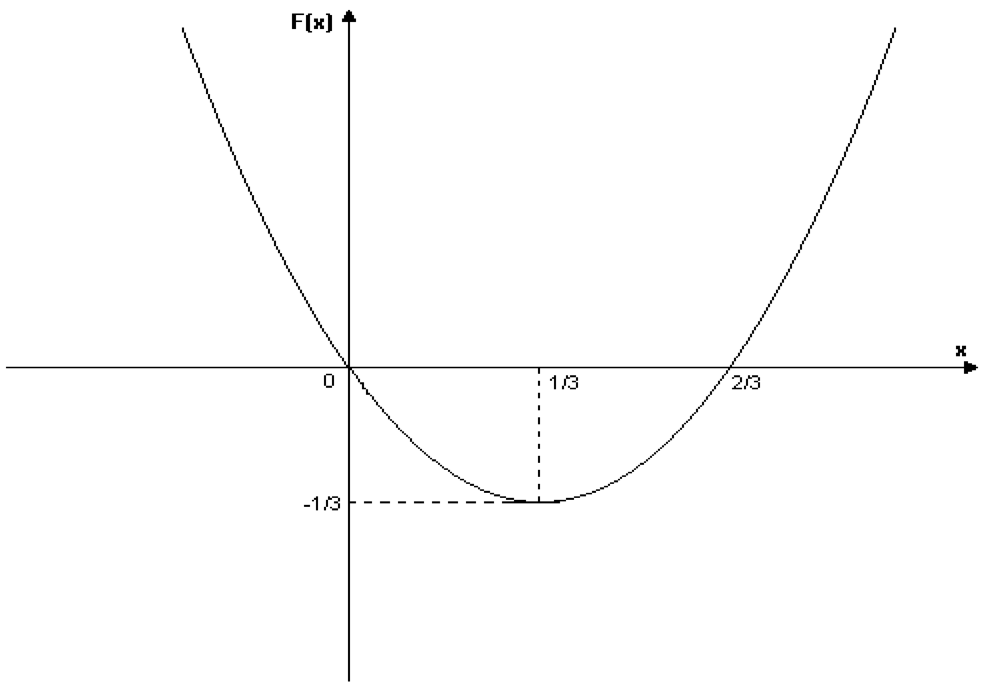
Δ) Για ποιες αρχικές συνθήκες το υλικό σημείο κάνει πεπερασμένη κίνηση;

Ε) Για ποιες αρχικές συνθήκες το υλικό σημείο κάνει μη πεπερασμένη κίνηση;

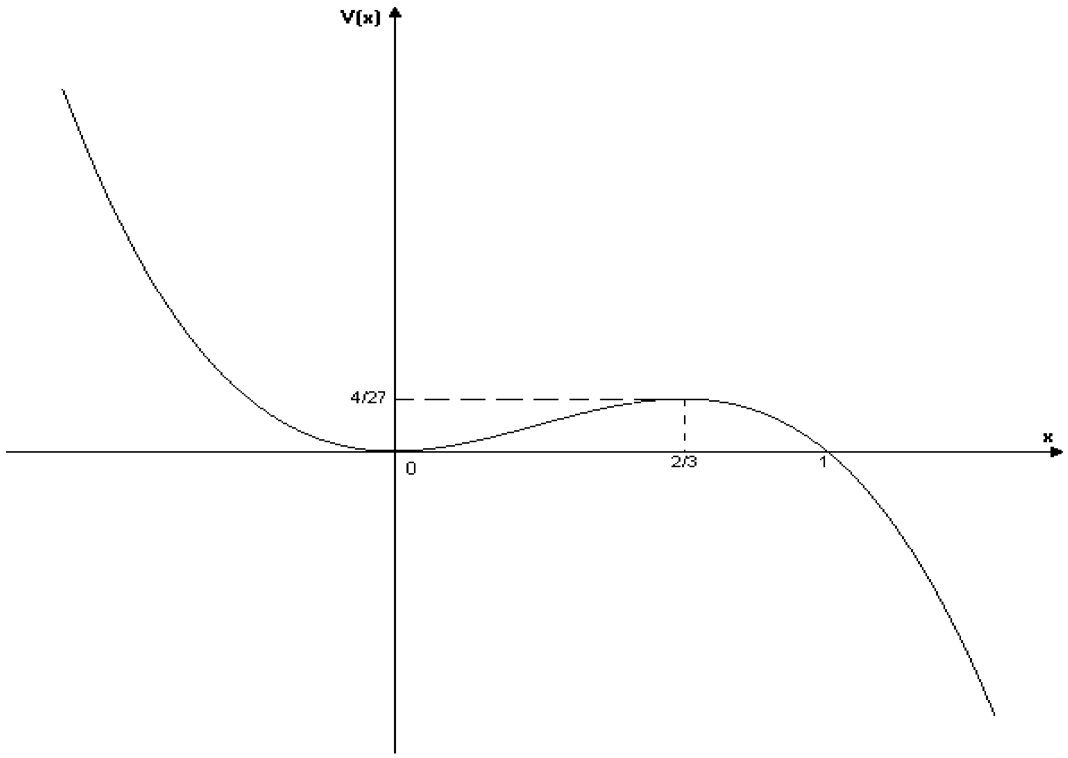
<u>Λύση</u>

Α) Έχουμε ότι $V(x) = -x^3 + x^2$. Συνεπώς $F(x) = -\dfrac{dV(x)}{dx} = 3x^2 - 2x$

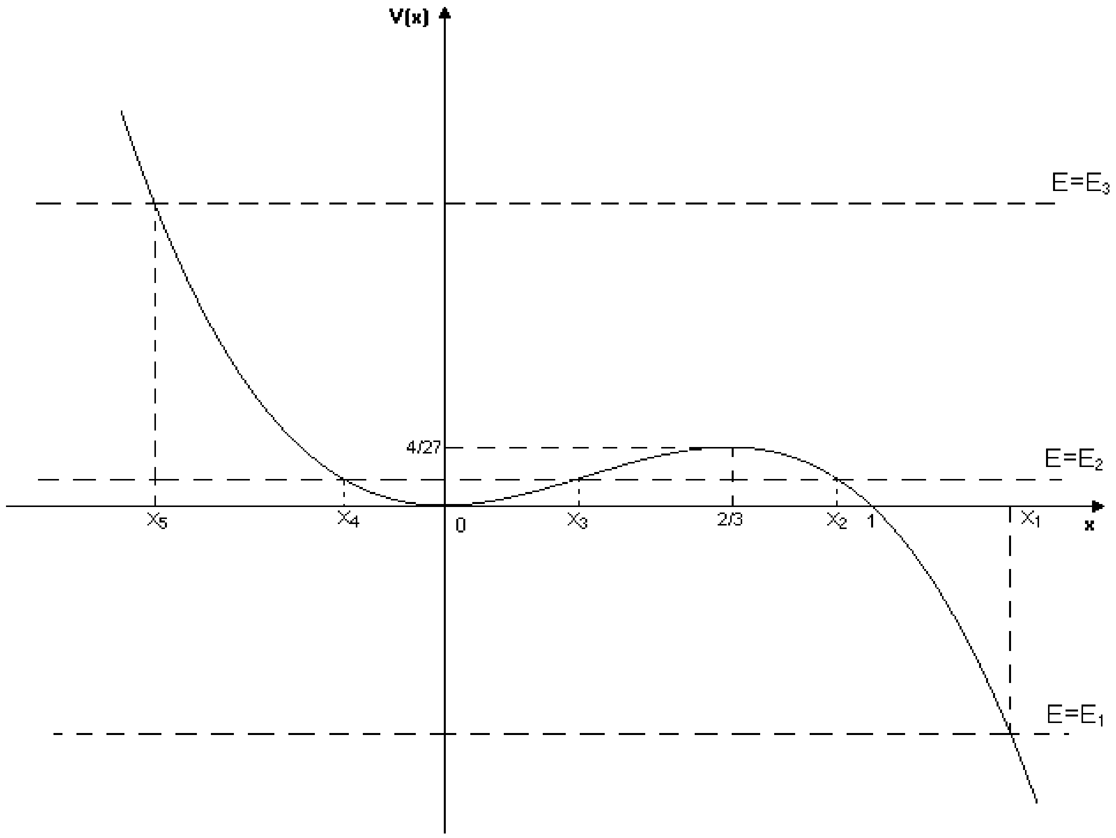
Η δύναμη μηδενίζεται στα σημεία $x = 0$ και $x = 2/3$, και έχει ελάχιστο $F_{\min} = -1/3$ στο $x = 1/3$.



Β) Η δυναμική ενέργεια $V(x)$ μηδενίζεται στα σημεία $x = 0$ και $x = 1$, έχει ελάχιστο $V_{\min} = 0$ στο $x = 0$ και μέγιστο $V_{\max} = 4/27$ στο $x = 2/3$.



Γ) Από τις αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0$ και $u(0) = u_0$ έχομε ότι $E = \frac{1}{2}mu_0^2 + V(x_0) = \frac{1}{2}mu_0^2 - x_0^3 + x_0^2$. Συνεπώς, από τη γραφική παράσταση της $V(x)$ παρατηρούμε ότι η διερεύνηση πρέπει να γίνει για τρεις περιοχές τιμών της ολικής ενέργειας E: 1) $E < V_{\min} = 0$, 2) $V_{\min} = 0 < E < V_{\max} = 4/27$, 3) $E > V_{\max} = 4/27$ καθώς και για τις τιμές $E = V_{\min} = 0$ και $E = V_{\max} = 4/27$.



α) Για $E = E_1 < 0$, όπου E_1 είναι <u>τυχούσα</u> ενέργεια μικρότερη του $V_{\min} = 0$, η κίνηση του υλικού σημείου επιτρέπεται μόνο στις θέσεις x για τις οποίες $V(x) \le E_1$. Άρα κίνηση επιτρέπεται μόνο για $x \ge x_1$, όπου το x_1 είναι η <u>πραγματική</u> λύση της εξίσωσης $V(x) = E_1$, δηλαδή $-x^3 + x^2 = E_1$. (Οι δυο άλλες λύσεις είναι <u>συζυγείς μιγαδικές</u>.) Έτσι, αν το υλικό σημείο ξεκινήσει από τη θέση $x_0 > x_1$ και έχει θετική αρχική ταχύτητα, θα πάει με συνεχώς αυξανόμενη κατά μέτρο ταχύτητα στο $+\infty$, ενώ αν έχει αρνητική αρχική ταχύτητα θα πάει με μειούμενη ταχύτητα μέχρι το σημείο x_1, εκεί θα <u>σταματήσει</u> στιγμιαία και μετά με συνεχώς αυξανόμενη ταχύτητα θα πάει στο $+\infty$.

β) Για $E = 0$, το υλικό σημείο μπορεί να κινείται στην περιοχή $x \ge 1$ ή να ακινητεί στο σημείο $x = 0$, διότι η κινητική του ενέργεια εκεί είναι μηδέν και η δύναμη που του ασκείται εκεί είναι μηδέν.

γ) Για $0 < E = E_2 < 4/27$, όπου E_2 είναι τυχούσα ενέργεια μεταξύ των τιμών $V_{\min}$ και $V_{\max}$, κίνηση του υλικού σημείου επιτρέπεται είτε για $x \ge x_2$ είτε για $x_4 \le x \le x_3$. Σε ποια από τις δυο περιοχές θα κινηθεί το υλικό σημείο εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Τα σημεία x_2, x_3, x_4 είναι <u>πραγματικές</u> λύσεις της εξίσωσης $-x^3 + x^2 = E_2$. Αν η αρχική θέση $x = x_0$ του υλικού σημείου ήταν $x_0 \ge x_2$, τότε η κίνησή του περιορίζεται στην περιοχή $x \ge x_2$. Αν όμως $x_4 \le x_0 \le x_3$, τότε η κίνηση περιορίζεται μεταξύ των σημείων $x = x_4$ και $x = x_3$ και το υλικό σημείο κάνει ταλάντωση (<u>όχι αρμονική</u>) μεταξύ των δύο αυτών σημείων.

δ) Για $E = 4/27$ το υλικό σημείο μπορεί να κινείται μόνο δεξιά του σημείου $x = x_6$ που είναι η μικρότερη πραγματική λύση της εξίσωσης $-x^3 + x^2 = 4/27$. Οι άλλες δυο είναι η διπλή ρίζα $x = 2/3$. Αν περάσει από τη θέση $x = 2/3$, το υλικό σημείο ηρεμεί εκεί για πάντα, διότι η κινητική ενέργειά του είναι μηδέν και η δύναμη που του ασκείται εκεί είναι μηδέν.

ε) Για $E = E_3 > 4/27$, όπου E_3 είναι τυχούσα ενέργεια μεγαλύτερη του $V_{\max}$, το υλικό σημείο μπορεί να κινείται στην περιοχή $x \geq x_5$, όπου x_5 είναι η πραγματική λύση της εξίσωσης $-x^3 + x^2 = E_3$. Η περαιτέρω διερεύνηση είναι όπως στην περίπτωση $E = E_1 < 0$.

Δ) Στο ερώτημα Γ είδαμε ότι για $E_{\min} = 0 < E = E_2 < E_{\max} = 4/27$ το υλικό σημείο ενδέχεται να κάνει πεπερασμένη κίνηση. Συνεπώς, για $E = E_2$, οι αρχικές συνθήκες μπορούν να $x_4 \leq x(0) = x_0 \leq x_3$, όπου x_4 και x_3 είναι οι δυο μικρότερες λύσεις της εξίσωσης $-x^3 + x^2 = E_2$ και $u(0) = u_0 = \pm\sqrt{(2/m)[E_2 - V(x_0)]} = \pm\sqrt{(2/m)[E_2 - (-x_0^3 + x_0^2)]}$.

Για την ειδική περίπτωση $E = 0$ οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0) = x_0 = 0$ και $u(0) = u_0 = 0$. Το υλικό σημείο είναι ακίνητο.

Για την ειδική περίπτωση $E = 4/27$ οι αρχικές συνθήκες είναι είτε $x_6 \leq x(0) = x_0 \leq 2/3$, όπου x_6 είναι η μικρότερη λύση της εξίσωσης $-x^3 + x^2 = 4/27$ (η μεγαλύτερη είναι 2/3) και $u(0) = u_0 = \pm\sqrt{(2/m)[(4/27) - V(x_0)]} = \pm\sqrt{(2/m)[(4/27) - (-x_0^3 + x_0^2)]}$ είτε $x(0) = x_0 > 2/3$ και $u(0) = u_0 = -\sqrt{(2/m)[E_1 - V(x_0)]} = -\sqrt{(2/m)[E_1 - (-x_0^3 + x_0^2)]}$. Και στις δυο περιπτώσεις το υλικό σημείο θα κάνει πεπερασμένη κίνηση και θα καταλήξει στο σημείο $x = 2/3$.

Ε) 1. Για $E = E_1 < 0$ είδαμε ότι κίνηση του υλικού σημείου επιτρέπεται μόνο για $x \geq x_1$, όπου το x_1 είναι η πραγματική λύση της εξίσωσης $V(x) = E_1$, δηλαδή $-x^3 + x^2 = E_1$. Έτσι, οι αρχικές συνθήκες μπορεί να είναι $x(0) = x_0 \geq x_1$ και $u(0) = u_0 = \pm\sqrt{(2/m)[E_1 - V(x_0)]} = \pm\sqrt{(2/m)[E_1 - (-x_0^3 + x_0^2)]}$.

2. Για $E = 0$ οι αρχικές συνθήκες μπορεί να είναι $x(0) = x_0 \geq 1$ και $u(0) = u_0 = \pm\sqrt{(2/m)[-V(x_0)]} = \pm\sqrt{(2/m)[(x_0^3 - x_0^2)]}$.

3. Για $0 < E = E_2 < 4/27$ είδαμε ότι το υλικό σημείο μπορεί να κάνει μη πεπερασμένη κίνηση μόνο αν αρχικά ήταν σε θέση $x \geq x_2$. Άρα οι αρχικές συνθήκες μπορεί να είναι $x(0) = x_0 \geq x_2$ και $u(0) = u_0 = \pm\sqrt{(2/m)[E_2 - V(x_0)]} = \pm\sqrt{(2/m)[E_2 - (-x_0^3 + x_0^2)]}$.

4. Για $E = 4/27$ οι αρχικές συνθήκες μπορεί να είναι $x(0) = x_0 > 2/3$, και $u(0) = u_0 = \sqrt{(2/m)[4/27 - V(x_0)]} = \sqrt{(2/m)[4/27 - (-x_0^3 + x_0^2)]}$. Προσοχή: Αν η αρχική ταχύτητα είναι αρνητική ή αν η αρχική θέση του είναι $x_6 \le x < 2/3$, τότε το υλικό σημείο θα κινηθεί μέχρι τη θέση $x = 2/3$, όπου θα σταματήσει για πάντα.

5. Για $E = E_3 > 4/27$ είδαμε ότι κίνηση του υλικού σημείου επιτρέπεται μόνο για $x \ge x_5$, όπου το x_5 είναι η πραγματική λύση της εξίσωσης $V(x) = E_3$, δηλαδή $-x^3 + x^2 = E_3$. Έτσι, οι αρχικές συνθήκες μπορεί να είναι $x(0) = x_0 \ge x_5$ και $u(0) = u_0 = \pm\sqrt{(2/m)[E_3 - V(x_0)]} = \pm\sqrt{(2/m)[E_3 - (-x_0^3 + x_0^2)]}$.

Παράδειγμα 1.14: Η δυναμική ενέργεια ενός υλικού σημείου μάζας m είναι $V(x) = ax^3 - bx^2$, όπου $a = 1$ Joule/m^3, $b = 1$ Joule/m^2 και το x μετράται σε m.

Α) Να βρεθεί και να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δύναμη $F(x)$ που ασκείται στο υλικό σημείο.

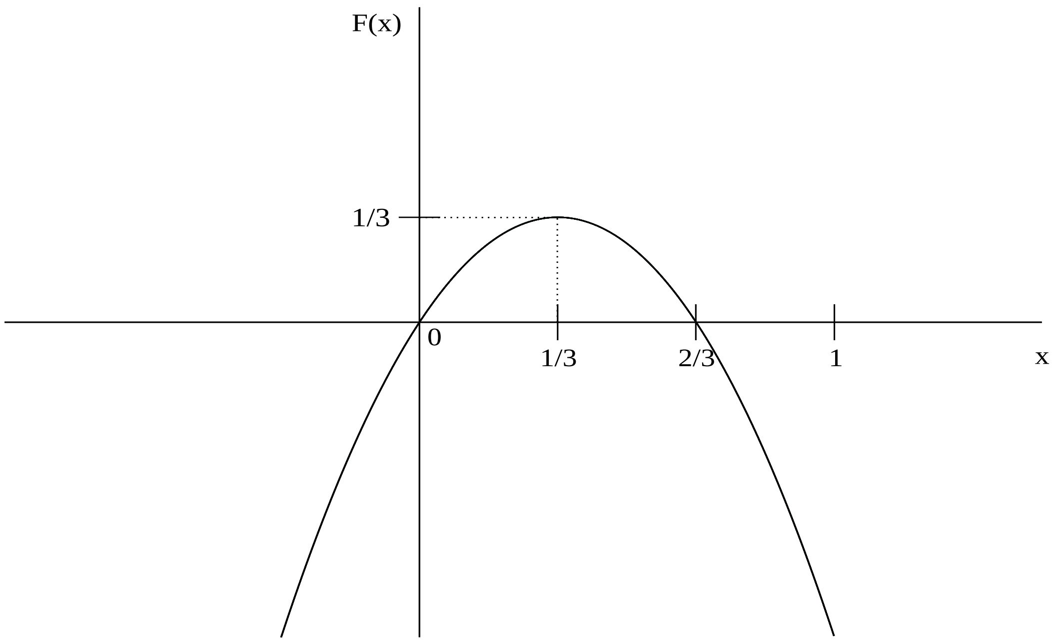
Β) Να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δυναμική ενέργεια $V(x)$ του υλικού σημείου.

Γ) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου για όλες τις τιμές της ολικής ενέργειας E, δηλαδή για οποιεσδήποτε **επιτρεπτές** αρχικές συνθήκες. Υπενθυμίζεται ότι δεν μπορεί το υλικό σημείο να βρεθεί σε μια θέση x για την οποία $V(x) > E$.

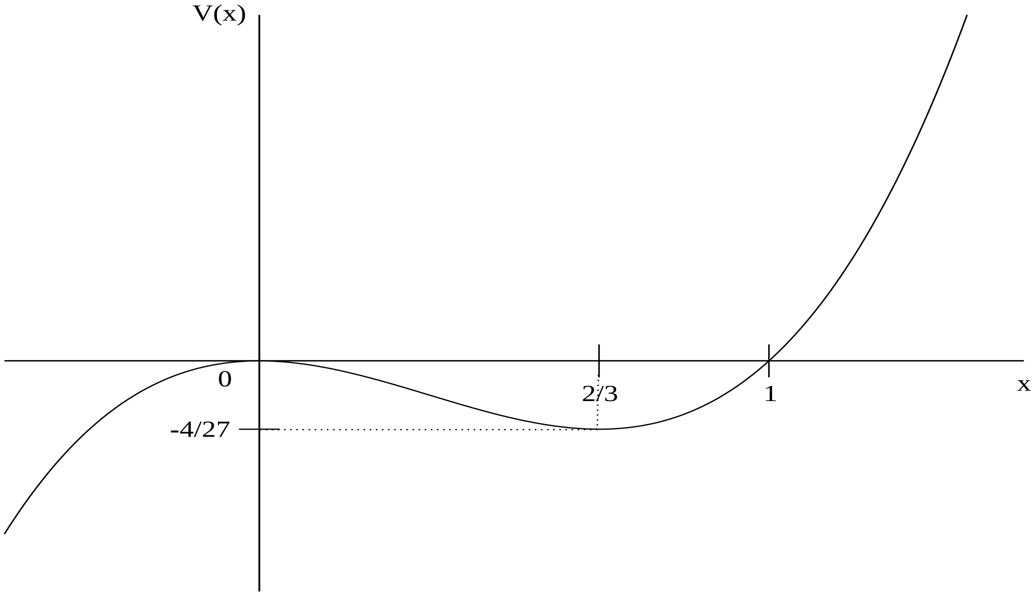
Δ) Για ποιες αρχικές συνθήκες το υλικό σημείο κάνει μη πεπερασμένη κίνηση;

Λύση

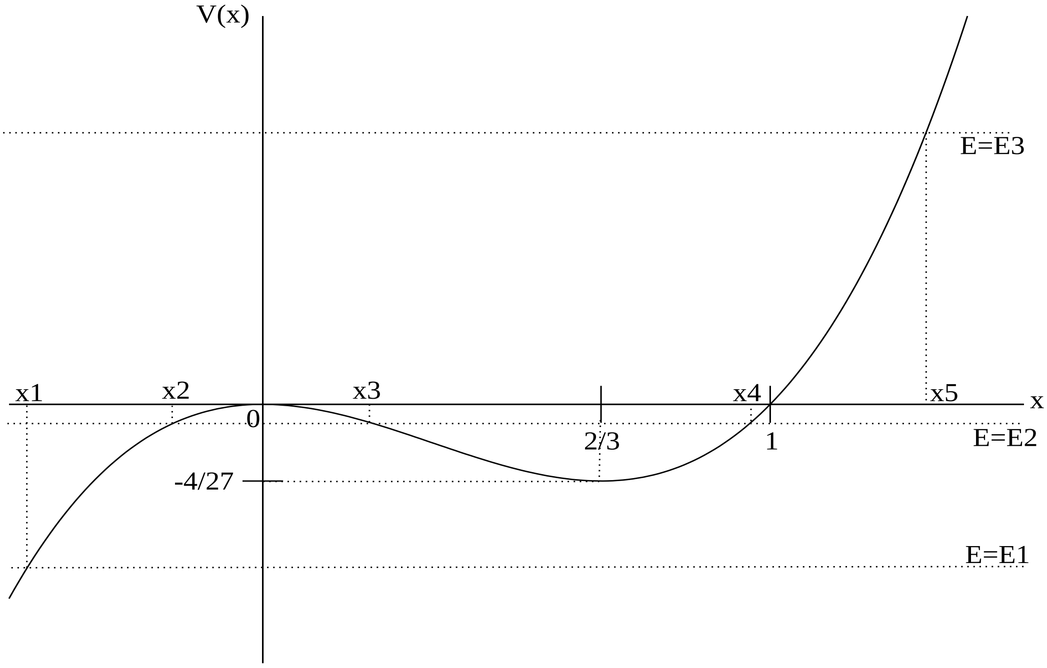
Α) Έχουμε ότι $V(x) = x^3 - x^2$. Συνεπώς $F(x) = -\dfrac{dV(x)}{dx} = -3x^2 + 2x$.



Β) Η δυναμική ενέργεια $V(x)$ μηδενίζεται στα σημεία $x=0$ και $x=1$, έχει μέγιστο



Γ) Από τη γραφική παράσταση της $V(x)$ παρατηρούμε ότι η διερεύνηση πρέπει να



α) Για $E=E_1<-4/27$ κίνηση του υλικού σημείου επιτρέπεται μόνο στις θέσεις x για τις οποίες $V(x)\le E_1$. Άρα κίνηση επιτρέπεται μόνο για $x\le x_1$, όπου το x_1 είναι η πραγματική λύση της εξίσωσης $V(x)=E_1$, δηλαδή $x^3-x^2=E_1$. Έτσι, αν το υλικό σημείο ξεκινήσει από τη θέση $x_0 < x_1$ και έχει αρνητική αρχική ταχύτητα θα πάει με συνεχώς αυξανόμενη κατά μέτρο ταχύτητα στο $-\infty$, ενώ αν έχει θετική αρχική ταχύτητα θα πάει με μειούμενη ταχύτητα μέχρι το σημείο x_1, εκεί θα σταματήσει <u>στιγμιαία</u> και μετά με συνεχώς αυξανόμενη κατά μέτρο ταχύτητα θα πάει στο $-\infty$.

β) Για $-\frac{4}{27} < E = E_2 < 0$ κίνηση του υλικού σημείου επιτρέπεται είτε για $x \le x_2$ είτε για $x_3 \le x \le x_4$. Τα σημεία x_2, x_3, x_4 είναι πραγματικέςλύσεις της εξίσωσης $x^3 - x^2 = E_2$. Αν η αρχική θέση $x = x_0$ του υλικού σημείου ήταν $x_0 \le x_2$, τότε η κίνησή του περιορίζεται στην περιοχή $x \le x_2$. Αν όμως $x_3 \le x_0 \le x_4$, τότε η κίνηση περιορίζεται μεταξύ των σημείων $x = x_3$ και $x = x_4$ και το υλικό σημείο κάνει ταλάντωση (<u>όχι αρμονική</u>) μεταξύ των δύο αυτών σημείων.

γ) Για $E = -4/27$ το υλικό σημείο είτε ηρεμεί στη θέση $x = 2/3$ είτε κινείται αριστερά του σημείου που είναι πραγματική λύση της εξίσωσης $x^3 - x^2 = -4/27$.

δ) Για $E = 0$ το υλικό σημείο μπορεί να κινείται στην περιοχή $x \le 1$. Αν περάσει από το σημείο $x = 0$, <u>σταματά εκεί για πάντα</u>, διότι η κινητική του ενέργεια είναι μηδέν και η δύναμη που του ασκείται εκεί είναι μηδέν.

ε) Για $E = E_3 > 0$ το υλικό σημείο μπορεί να κινείται στην περιοχή $x \le x_5$, όπου x_5 είναι η πραγματική λύση της εξίσωσης $x^3 - x^2 = E_3$. Η περαιτέρω διερεύνηση είναι όπως στην περίπτωση $E = E_1 < -4/27$.

Δ) 1. Για $E = E_1 < -4/27$ είδαμε ότι κίνηση του υλικού σημείου επιτρέπεται μόνο για $x \le x_1$, όπου το x_1 είναι η πραγματική λύση της εξίσωσης $V(x) = E_1$, δηλαδή $x^3 - x^2 = E_1$. Έτσι, οι αρχικές συνθήκες μπορεί να είναι $x(0) = x_0 \le x_1$ και $u(0) = u_0 = \pm\sqrt{(2/m)[E_1 - V(x_0)]} = \pm\sqrt{(2/m)[E_1 - (x_0^3 - x_0^2)]}$.

2. Για $E = -4/27$ οι αρχικές συνθήκες μπορεί να είναι $x(0) = x_0 \le x_1'$, όπου x_1' είναι η <u>μικρότερη</u> πραγματική λύση της εξίσωσης $x^3 - x^2 = -4/27$, και $u(0) = u_0 = \pm\sqrt{(2/m)[-4/27 - V(x_0)]} = \pm\sqrt{(2/m)[-4/27 - (x_0^3 - x_0^2)]}$.

3. Για $-\frac{4}{27} < E = E_2 < 0$ είδαμε ότι το υλικό σημείο μπορεί να κάνει μη πεπερασμένη κίνηση μόνο αν αρχικά ήταν σε θέση $x \le x_2$. Άρα οι αρχικές συνθήκες μπορεί να είναι $x(0) = x_0 \le x_2$ και $u(0) = u_0 = \pm\sqrt{(2/m)[E_2 - V(x_0)]} = \pm\sqrt{(2/m)[E_2 - (x_0^3 - x_0^2)]}$.

4. Για $E = 0$ οι αρχικές συνθήκες μπορεί να είναι $x(0) = x_0 < 0$, και $u(0) = u_0 = -\sqrt{(2/m)[-V(x_0)]} = -\sqrt{(2/m)[-(x_0^3 - x_0^2)]}$. <u>Προσοχή</u>: Αν η αρχική

ταχύτητα είναι θετική, τότε το υλικό σημείο θα κινηθεί μέχρι τη θέση $x=0$, όπου θα σταματήσει <u>για πάντα</u>.

5. Για $E=E_3>0$ είδαμε ότι κίνηση του υλικού σημείου επιτρέπεται μόνο για $x \le x_5$, όπου το x_5 είναι η πραγματική λύση της εξίσωσης $V(x)=E_3$, δηλαδή $x^3-x^2=E_3$. Έτσι, οι αρχικές συνθήκες μπορεί να είναι $x(0)=x_0 \le x_5$ και $u(0)=u_0=\pm\sqrt{(2/m)[E_3-V(x_0)]}=\pm\sqrt{(2/m)[E_3-(x_0^3-x_0^2)]}$.

Άσκηση 1.9: Η δυναμική ενέργεια ενός υλικού σημείου μάζας $m=1\,\text{kg}$ είναι $V(x)=-ax^3+bx$, όπου $a=1$ Joule/m^3, $b=1$ Joule/m και το x μετράται σε m.
Α) Να βρεθεί και να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δύναμη $F(x)$ που ασκείται στο υλικό σημείο.
Β) Να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δυναμική ενέργεια $V(x)$ του υλικού σημείου.
Γ) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου αν οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0)=0$ και $u(0)=0$.
Δ) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου αν οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0)=1\,\text{m}$ και $u(0)=0$.
Ε) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου αν οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0)=0$ και $u(0)=0{,}5\,\text{m/s}$.
ΣΤ) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου αν οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0)=0$ και $u(0)=2\,\text{m/s}$.
Ζ) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου **για όλες τις τιμές της ολικής ενέργειας** E, δηλαδή για οποιεσδήποτε **επιτρεπτές** αρχικές συνθήκες.

Άσκηση 1.10: Η δυναμική ενέργεια ενός υλικού σημείου μάζας $m=1\,\text{kg}$ είναι $V(x)=V_0\sin(kx)$, όπου $V_0=1$ Joule, $k=1$ m^{-1} και το x μετράται σε m.
Α) Να βρεθεί και να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δύναμη $F(x)$ που ασκείται στο υλικό σημείο.
Β) Να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δυναμική ενέργεια $V(x)$ του υλικού σημείου.
Γ) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου αν οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0)=-\pi/2\,\text{m}$ και $u(0)=0$.
Δ) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου **για όλες τις τιμές της ολικής ενέργειας** E, δηλαδή για οποιεσδήποτε **επιτρεπτές** αρχικές συνθήκες.

Άσκηση 1.11: Η δυναμική ενέργεια ενός υλικού σημείου μάζας $m=1\,\text{kg}$ είναι $V(x)=V_0\cos(kx)$, όπου $V_0=1$ Joule, $k=1$ m^{-1} και το x μετράται σε m.
Α) Να βρεθεί και να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δύναμη $F(x)$ που ασκείται στο υλικό σημείο.
Β) Να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δυναμική ενέργεια $V(x)$ του υλικού σημείου.
Γ) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου **για όλες τις τιμές της ολικής ενέργειας** E, δηλαδή για οποιεσδήποτε **επιτρεπτές** αρχικές συνθήκες.
Δ) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου αν οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0)=3\pi/2\,\text{m}$ και $u(0)=0$.

Άσκηση 1.12: Η δυναμική ενέργεια ενός υλικού σημείου μάζας $m = 1\,\text{kg}$ είναι $V(x) = \frac{1}{2}k\,x^2 - \frac{1}{4}\varepsilon\,x^4$, όπου $k = 2\,\text{Joule/m}^2$, $\varepsilon = 1$ Joule/m^4 και το x μετράται σε m.

Α) Να βρεθεί και να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δύναμη $F(x)$ που ασκείται στο υλικό σημείο.

Β) Να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δυναμική ενέργεια $V(x)$ του υλικού σημείου.

Γ) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου **για όλες τις τιμές της ολικής ενέργειας** E, δηλαδή για οποιεσδήποτε **επιτρεπτές** αρχικές συνθήκες.

Δ) Για ποιες αρχικές συνθήκες το υλικό σημείο κάνει ταλάντωση;

Άσκηση 1.13: Η δυναμική ενέργεια ενός υλικού σημείου μάζας $m = 1\,\text{kg}$ είναι $V(x) = \frac{1}{4}\alpha\,x^4 - \frac{1}{2}\beta\,x^2$, όπου $\alpha = 1$ Joule/m^4, $\beta = 2\,\text{Joule/m}^2$ και το x μετράται σε m.

Α) Να βρεθεί και να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δύναμη $F(x)$ που ασκείται στο υλικό σημείο.

Β) Να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δυναμική ενέργεια $V(x)$ του υλικού σημείου.

Γ) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου **για όλες τις τιμές της ολικής ενέργειας** E, δηλαδή για οποιεσδήποτε **επιτρεπτές** αρχικές συνθήκες.

Δ) Για ποιες αρχικές συνθήκες το υλικό σημείο κάνει ταλάντωση;

Ε) Για ποιες αρχικές συνθήκες το υλικό σημείο κάνει μη πεπερασμένη κίνηση;

Άσκηση 1.14: Η δυναμική ενέργεια ενός υλικού σημείου μάζας m είναι $V(x) = V_0 \frac{x\,x_0}{x^2 + x_0^2}$, όπου $V_0 = 1$ Joule, $x_0 = 1\,\text{m}$ και το x μετράται σε m.

Α) Να βρεθεί και να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δύναμη $F(x)$ που ασκείται στο υλικό σημείο.

Β) Να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δυναμική ενέργεια $V(x)$ του υλικού σημείου.

Γ) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου **για όλες τις τιμές της ολικής ενέργειας** E, δηλαδή για οποιεσδήποτε **επιτρεπτές** αρχικές συνθήκες.

Άσκηση 1.15: Η δυναμική ενέργεια ενός υλικού σημείου μάζας $m = 1\,\text{kg}$ είναι $V(x) = \frac{V_0}{x_0^3} x^2 (x - b)$, όπου $V_0 = 1$ Joule, $b = 1$ m, $x_0 = 1$ m και το x μετράται σε m.

Α) Να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δυναμική ενέργεια $V(x)$ του υλικού σημείου.

Β) Να μελετηθεί **με ακρίβεια** η κίνηση του υλικού σημείου για $t > 0$ αν οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0) = 1\,\text{m}$ και $u(0) = 0$.

Γ) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου **για όλες τις τιμές της ολικής ενέργειας** E, δηλαδή για οποιεσδήποτε **επιτρεπτές** αρχικές συνθήκες.

Δ) Για ποιες αρχικές συνθήκες το υλικό σημείο κάνει μη πεπερασμένη κίνηση;

Άσκηση 1.16: Η δυναμική ενέργεια ενός υλικού σημείου μάζας $m = 1\,\text{kg}$ είναι $V(x) = -\frac{V_0}{x_0^3}(x^2 - a)(x - b)$, όπου $a = 4$ m^2, $b = 1$ m, $V_0 = 1$ Joule, $x_0 = 1$ m και το x μετράται σε m.

Α) Να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δυναμική ενέργεια $V(x)$ του υλικού σημείου.
Β) Να μελετηθεί **με ακρίβεια** η κίνηση του υλικού σημείου για όλες τις επιτρεπτές αρχικές συνθήκες.
Γ) Για ποιες αρχικές συνθήκες το υλικό σημείο κάνει ταλάντωση;
Δ) Για ποιες αρχικές συνθήκες το υλικό σημείο κάνει μη πεπερασμένη κίνηση;
Ε) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου για $x(0) = -2\,\text{m}$ και $u(0) = -5\,\text{m/s}$.

Άσκηση 1.17: Η δυναμική ενέργεια ενός υλικού σημείου μάζας $m = 1\,\text{kg}$ είναι $V(x) = \dfrac{V_0}{x_0^3} x(x-a)(x-b)$, όπου $a = 1$ m, $b = 2$ m, $V_0 = 1$ Joule, $x_0 = 1$ m και το x μετράται σε m.
Α) Να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δυναμική ενέργεια $V(x)$ του υλικού σημείου.
Β) Να μελετηθεί **με ακρίβεια** η κίνηση του υλικού σημείου για όλες τις επιτρεπτές αρχικές συνθήκες.
Γ) Για ποιες αρχικές συνθήκες το υλικό σημείο κάνει ταλάντωση;
Δ) Για ποιες αρχικές συνθήκες το υλικό σημείο κάνει μη πεπερασμένη κίνηση;
Ε) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου για $x(0) = 2\,\text{m}$ και $u(0) = 5\,\text{m/s}$.

1.5 Γενικές δυνάμεις

Τίθεται τώρα εύλογα το ερώτημα: Τι κάνομε αν η δύναμη είναι πολύπλοκη και εξαρτάται όχι μόνο από τον χρόνο, από τη θέση, από την ταχύτητα, αλλά και από άλλες μεταβλητές; Δηλαδή αν $F = F(t, x, u, ...)$. Είναι μάλλον προφανές ότι είναι αδύνατον να βρούμε μια <u>αναλυτική</u> λύση. Σε τέτοιες περιπτώσεις, βρίσκομε <u>αριθμητική</u> λύση.

Έστω υλικό σημείο μάζας m που κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης $F = F(t, x, u, ...)$. Από τον Δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχομε ότι

$$m\frac{du}{dt} = F(t, x, u, ...) \tag{1.65}$$

ή

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{m}F(t, x, u, ...) \tag{1.66}$$

ή

$$du = \frac{1}{m}F(t, x, u, ...)dt \tag{1.67}$$

ή, κατά προσέγγιση,

$$\Delta u = u(t + \Delta t) - u(t) \approx \frac{1}{m}F(t, x, u, ...)\,\Delta t \tag{1.68}$$

ή

$$u(t + \Delta t) \approx u(t) + \frac{1}{m}F(t, x, u, ...)\,\Delta t\,. \tag{1.69}$$

Ομοίως, από τον ορισμό της ταχύτητας, γράφομε <u>κατά προσέγγιση</u>

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + u(t)\,\Delta t\,. \tag{1.70}$$

Οι εξισώσεις αυτές μας λένε ότι, αν ξέρομε τη θέση και την ταχύτητα σε μια χρονική στιγμή t, μπορούμε να βρούμε <u>προσεγγιστικά</u> τη θέση και την ταχύτητα σε μια επόμενη χρονική στιγμή $t + \Delta t$. Όσο πιο μικρό είναι το Δt τόσο πιο καλή είναι η προσέγγιση.

Δεδομένου όμως ότι ξέρομε τη θέση και την ταχύτητα του υλικού σημείου την αρχική χρονική στιγμή (ας πούμε $t = 0$) μπορούμε να βρούμε προσεγγιστικά τη θέση και την ταχύτητα του υλικού σημείου σε κάθε επόμενη χρονική στιγμή. Άρα λύσαμε το πρόβλημα! Πώς νομίζετε ότι φθάσαμε στη Σελήνη; Με αναλυτική λύση; Ένας ολόκληρος κλάδος των Μαθηματικών (Αριθμητική Ανάλυση) έχει αναπτυχθεί για τη γρήγορη και ακριβή αριθμητική λύση Διαφορικών Εξισώσεων. Τα περισσότερα από τα δύσκολα και ενδιαφέροντα προβλήματα της Φυσικής λύνονται μόνον αριθμητικά! Αναλυτικά λύνονται μόνο τα προβλήματα της Εισαγωγικής Φυσικής, άντε και λίγα ακόμη.